

Др Милосав Марјановић, др Гојко Калајџић

О РЕЛАЦИЈИ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ

У доброј настави, нови појмови, нове идеје, итд. уводе се тако што се употребљавају.
(Rene Thom)*

1. Увод.

У свим ситуацијама у којима се врши класификовање, имплицитно је садржана нека релација еквиваленције. Само класификовање представља раздвајање објеката неке колекције у дисјунктне подколекције, при чему објекти сврстани у исту подколекцију имају исто заједничко својство. Ако кажемо да у таквим ситуацијама, на тај начин назиремо релацију еквиваленције, онда постоји велики број примера за таква назирања већ од самих почетака наставе математике.

Циљ нам је да у овом чланку релацију еквиваленције схватимо као *једначен је објеката по неком заједничком својству*. Даље, да у таквом једначењу истакнемо неке поступке које сматрамо значајним, а које формално можемо описати као *план рада* који би се састојао од:

1. *Истицање својства које служи за класификовање,*
2. *Истицање дисјунктности класа еквиваленције,*
3. *Уочавање стандардног представника сваке класе (а који се често на врло природан начин намеће),*
4. *Замене класе (као подскупа) произвољним елементом (као симболом за променљиву којој приписујемо заједничко својство елемената те класе).*

При том не морамо претпостављати да је издвојен сам појам релације еквиваленције, односно да је отргнут од конкретног садржаја.

Апстрактно, релацију еквиваленције на скупу S можемо задати као:

1. *Декомпозицију скупа S (тј. неко његово разбијање на дисјунктне подскупе).*

Тада је термин декомпозиција оправданији од термина релација.

2. *Бинарну релацију на S која је рефлексивна, симетрична и транзитивна.*

Тада се доказује да скуп класа еквиваленције представља једну декомпозицију скупа S . Дакле, можемо рећи, користећи се језиком психологије, да се у сваком случају декомпозиција јавља као пратећа когнитивна схема уз појам релације еквиваленције.

* Из чланка Р. Тома, Модерна математика – да ли постоји, Настава математике I (XXIII), 1, 1974, стр. 27-38

2. Морамо бринути о смислу

Корак који значи уношење у наставу математике апстрактног појма релације еквиваленције, може се правдати намером ка повишеној формализацији која служи јаснијем логичком сагледавању текућих садржаја. Мора тада и ученик бити на нивоу где се подразумева да је развио способности и стекао разумевање за такву формализацију.

Ради конкретније анализе, узмимо да посматрамо два једноставна примера. Нека је $S = \{a, b\}$ и нека су релације на S представљене следећим сликама:

Питајмо се јесу ли ове релације транзитивне.

Услов транзитивности

$$x \rho y \text{ и } y \rho z \implies x \rho z$$

јавља се у форми импликације чије је, иначе, логичко вредновање суптилно, а тиме хоћемо да кажемо да је то сложена реченица која се у природном језику не осмишљава са „неприродним“ логичким вредностима саставних реченица. За људе који нису учили формалну логику, реченице типа импликације чије логичко вредновање одговара другој, трећој и четвртој врсти таблице:

p	q	$p \implies q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$

доживљавају се као бесциљне и бесмислене. Тада услов транзитивности је оперативан у ужем случају кад су вредности x, y, z оне за које су реченице $x \rho y$ и $y \rho z$, обе тачне.

У првом примеру имамо два избора: $x = y = z = a$ и $x = y = z = b$.

У другом примеру само је реченица $a \rho b$ тачна, па је за неприпремљене услов транзитивности у свим случајевима „бесмислен“! Ипак, ова релација јесте транзитивна.

Сви ми поштујемо принцип: прво значење а потом формализација. И тај принцип схватамо на тај начин што видимо један садржај изложен језиком нижег степена апстрактности и што осећамо да тај садржај треба логички средити, користећи језик вишег степена апстрактности. У случају релације еквиваленције, сабрано значење представља велики број значајних конкретних примера релација. Формализација тог значења претпоставља издвајање појма релације и општих релацијских својстава. Сама дефиниција релације еквивалентности као оне која је рефлексивна, симетрична и транзитивна мора бити прослеђена тврђењем, да

класе еквиваленције чине декомпозицију. То тврђење успоставља смисао овом појму који је везан за претходно развијено знање.

Не опредељујући се за оно што бисмо сматрали правим местом приче о релацијама *in abstracto*, слободни смо закључити да са том причом не треба кретати према настави математике у основној школи (укључујући и 8. разред).

3. Примери и план рада с њима

Кроз примере које ћемо навести имамо намеру да илуструјемо идеје које смо изнели у уводу овог чланка.

(I) Еквивалентност израза. Кад погледамо релацију

$$2 + 3 = 1 + 4,$$

знак „=” има двојако значење. Знак је једнакости ако сматрамо да упоређујемо бројеве али је знак еквивалентности ако упоређујемо изразе.

Својство на основу кога једначимо изразе је иста бројевна вредност. Начин како проверавамо ту једнакост бројева представљених изразима на различит начин, своди се на рачунање вредности израза у оквирима аритметике. А то рачунање није ништа друго него одређивање стандардног представника у класи израза. Примењујемо правила рачунања са циљем да добијемо стандардни цифарски запис. На пример,

$$3 \cdot (4 + 7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 12 + 21 = 33,$$

где је 33 стандардни представник за ову класу израза.

У овом случају класе еквиваленције није могуће „сагледати“ као дисјунктне. Два израза, корак по корак, сведемо на цифарски запис и тада видимо јесу ли или не исти број (тачније имају исту бројевну вредност). Тако класе еквиваленције почињемо да сматрамо дисјунктним (ако уопште има разлога да на ту помисао долазимо).

Једначење израза са променљивом је такође пример за релацију еквиваленције. Кад знак „=” схватамо као знак једнакости, тада једначимо функције. Што једноставнији такав израз, он је стандарднији, али се један једини стандардни представник не мора наметати. Рецимо

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1,$$

десни израз је једноставнији али је леви стандарднији ако нас интересује знак те функције. Кад пишемо једнакост

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1,$$

додајемо услов $x \neq -1$, чиме истичемо да оба израза дефинишу на скупу $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ исту функцију

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad \text{одн.} \quad x \mapsto x - 1$$

(а без тог услова то би биле две различите функције).

(II) Еквивалентност услова. Услови

$$(2x - 1)^2 - (x + 1)^2 = 45; \quad x^2 - 2x - 15 = 0; \quad x = 5 \quad \text{или} \quad x = -3$$

су еквивалентни, као и услови

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

а такође, за $a \geq 0$ и следећа два услова

$$\sqrt{a} > b; \quad a > b^2 \quad \text{или} \quad b < 0.$$

На ове услове можемо гледати као на пропозиционе функције. У првом случају домен таквих функција (уствари универзални скуп за променљиву x) је скуп реалних бројева. Њихове вредности су исказне функције. Рецимо у случају првог услова, за $x = 1$ имамо као вредност исказ $(2 \cdot 1 - 1)^2 - (1 + 1)^2 = 45$ (који није тачан), а за $x = 5$, исказ $(2 \cdot 5 - 1)^2 - (5 + 1)^2 = 45$ (који је тачан). У друга два случаја домен (односно универзални скуп) је раван $\mathbf{R}^2$.

Издавајући оне вредности променљиве за које су придружени искази тачни, имаћемо у првом случају скуп $\{-3, 5\}$, у другом $\{(3, 2)\}$, а у трећем тај скуп представљен је на следећој слици

као подграф функције $b = \sqrt{a}$. Ове скупе називамо истиносни скупи пропозиционих функција.

Видимо, дакле, да су два услова еквивалентни кад су њихови истиносни скупи једнаки. Тада такође кажемо да такви услови имају исто значење.

Мислимо да је врло значајно истицати еквивалентност услова, гледајући то као њихово једначење путем једначења кореспондентних истиносних скупова.

Решавање, рецимо система

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

чије је решење $x = \alpha$, $y = \beta$, није ништа друго до прелаз, путем примене правила, са једног облика на други док се најзад не добије стандардни облик тог услова

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta. \end{cases}$$

Постоји право обиље примера ове врсте на сваком нивоу наставе математике.

(III) Заокругљивање. Бројеви дати децималним записима заокругљују се тако што се једначе кад имају једнак део записа који иде до k -те децимале. Тада кажемо да је то заокругљивање бројева на k децимала.

Посматрајмо случај заокругљивања на једну децималу.

У случају простог одбацивања децимала једначимо све бројеве који припадају интервалима дужине 0,1, а који су приказани на следећој слици.

Декомпозиција је у овом случају геометријски јасно приказана, а стандардни представник се намеће као леви крај интервала јер има најједноставнији децимални запис.

Заокругљивање на k децимала, обично претпоставља могуће повећање k -те децимале за 1, кад је „ k плус прва“ децимала 5 или већа од 5. Декомпозиција је тада:

а стандардни представник је 0,0 или тачке које су средине осталих интервала које се опет намећу својим најједноставнијим цифарским записом.

(IV) Графици функција. У текућем стручном језику у оптицају су термини *граф* и *график функције*. Термин *граф* је скраћена форма термина *график* (латински: *graphicus*, грчки: *γραφικος*, са значењем цртеж). Рекло би се да се ипак не ради о истоветном значењу, већ да текућа пракса показује следећу ситуацију. За реалну функцију реалне променљиве $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, њен *граф* је скуп

$$\{(x, y) \mid y = fx\}.$$

График је и тај скуп али и свака његова скица која верно приказује одређена својства функције $y = fx$.

Испитујући функцију $y = f(x)$ одређујемо: њен домен, понашање на рубовима домена, знак и нуле, интервале монотоности, интервале над којима је конвексна одн. конкавна, тачке екстремума, превоја итд. Скицирајући график у истом координатном систему (или различитим са истом јединицом за дужину) одговарајуће криве не морају бити подударне међу собом (нити са графом те функције), али ми ћемо све такве скице сматрати одговарајућим у колико су респектована испитивана својства.

Рецимо, графици:

представљају функцију $y = x^2$ и ниједан не служи за одмеравање њених вредности тачка по тачка.

Класа кривих која верно одражава испитивана својства једне функције (на основу којих те криве једначимо) јесте скуп њених графика и сваки елемент тог скупа представља је подједнако добро.

Овај пример није интересантан за тумачење релације еквивалентности, али истицање ове еквивалентности уз задатак испитивања функција и цртања њихових графика јесте значајан и зато га овде укључујемо.

(V) Конгруенције. Нека је k фиксиран природан број. Према ставу о еуклидском дељењу целих бројева, за сваки цео број m постоје једнозначно одређени цели бројеви q и r , такви да је

$$m = kq + r, \quad 0 \leq r < k.$$

Сам тај цео број r зовемо *k-остатком* целог броја m и означавамо са $r = \varrho(m, k)$. При том, за целе бројеве m и n са истим k -остатком кажемо и да су *конгруентни* по модулу k и пишемо $m \equiv n \pmod{k}$. Другим, речима, по дефиницији је

$$m \equiv n \pmod{k} \iff \varrho(m, k) = \varrho(n, k).$$

Јасно је да је тако дефинисана релација рефлексивна, симетрична и транзитивна, а самим тим и једна релација еквиваленције у скупу целих бројева $\mathbf{Z}$. Зовемо је и његовом *k-конгруенцијом* или *конгруенцијом* по модулу k . Уз то важи и

$$m \equiv n \pmod{k} \iff k \mid (m - n).$$

Наиме, ако је ту $m = kq + r$ и $n = kp + s$, са $0 \leq r, s < k$, биће $m - n = k(q - p) + (r - s)$, као и $0 \leq |r - s| < k$, одакле следи да k дели $m - n$, ако и само ако је $r - s = 0$, а самим тим и $\varrho(m, k) = \varrho(n, k)$.

С друге стране, ако је $r = \varrho(m, k)$, из $r = k \cdot 0 + r$ и $0 \leq r < k$ следи да је тада и $\varrho(r, k) = r$, то јест $m \equiv r \pmod{k}$, па је сваки од целих бројева k -конгруентан тачно једном од бројева $0, 1, 2, \dots, k - 1$. То такође значи да скупови

$$r + k\mathbf{Z} = \{r + kq \mid q \in \mathbf{Z}\},$$

са $0 \leq r < k$, формирају и једну k -члану декомпозицију самог скупа $\mathbf{Z}$.

(VI) Елементарна еквивалентност. Има случајева кад релацију еквиваленције дефинишемо тако што прво дефинишемо елементарну еквивалентност.

Узмимо један пример те врсте.

Нека је $\mathcal{A}$ непразан скуп (алфабет). Елемент $a \in \mathcal{A}$ зваћемо слово a , (формални) степен a^n , ($n \in \mathbf{Z}$) зваћемо слог. Низ слогова $a^{n_1}a^{n_2} \dots a^{n_k}$ зваћемо реч, а реч без слова (празни скуп) означаћемо са 1.

За речи $w_1 = a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$, $w_2 = b_1^{m_1} \dots b_l^{m_l}$, дефинишемо њихов производ као реч

$$w_1 \cdot w_2 = a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k} b_1^{m_1} \dots b_l^{m_l}.$$

Тада је скуп $\mathcal{W}[\mathcal{A}]$ свих речи алфавета $\mathcal{A}$ семи-група с обзиром на дефинисано множење.

Уведимо на $\mathcal{W}[\mathcal{A}]$ елементарну еквивалентност као следеће једначење:

(I) $w_1 a^0 w_2 \stackrel{\varepsilon}{\sim} w_1 w_2$ (посебно $a^0 \stackrel{\varepsilon}{\sim} 1$),

(II) $w_1 a^m a^n a_2 \stackrel{\varepsilon}{\sim} w_1 a^{m+n} w_2$.

Две речи w', w'' узимамо да су еквивалентне ако постоји коначан низ речи $w_1, \dots, w_s$ таквих да је

$$w' \stackrel{\varepsilon}{\sim} w_1 \stackrel{\varepsilon}{\sim} \dots \stackrel{\varepsilon}{\sim} w_s \stackrel{\varepsilon}{\sim} w''.$$

Лако је проверити да је на овај начин задата релација еквиваленције $\sim$ на скупу $\mathcal{W}[\mathcal{A}]$.

(Дефинишући производ класа еквиваленције са

$$[w_1] \cdot [w_2] = [w_1 \cdot w_2],$$

лако је проверити да скуп класа еквиваленције

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}] = \mathcal{W}[\mathcal{A}] / \sim$$

постаје група, коју зовемо слободном групом над алфабетом $\mathcal{A}$.)

Релација „ $\stackrel{\varepsilon}{\sim}$ “ узима се (не наглашавајући то) са својствима рефлексивности и симетричности. Тада се лако види да је релација „ $\sim$ “, најмања релација еквиваленције која је проширује (или тачније која садржи релацију „ $\stackrel{\varepsilon}{\sim}$ “).

Надамо се да су наведени примери довољни да читалац сам сагледа (и као извођач наставе проведе) програм рада са релацијом еквиваленције и у многим другим случајевима којима обиљује настава математике на свим нивоима.