НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Др Зоран Каделбург

ИНВЕРЗНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

На усменом делу испита из Анализе I на Математичком факултету често поставим питање: „Да ли функција синус има инверзну?“ Не тако ретко одговор је: „Да, то је функција аркус синус.“ Ако затим поновим питање уз напомену да се подразумевало да се ради о функцији чији је домен скуп реалних бројева, неки од кандидата се предомисле, али известан број остаје при претходном тврђењу. После тога, беспредметно је да се постављају нека суптилнија питања, на пример: „Колико је $\arcsin(\sin x)$?“ Претпостављам да је разлог оваквом незнању врло мало време које је у средњошколској настави предвиђено за обраду инверзних тригонометријских функција; на универзитету, опет, углавном се претпоставља да се елементарне функције уче у средњој школи.

Циљ овог чланка је да на неки начин попуни поменуту празнину, апелујући да се бар за ове садржаје и у предложеном оквиру нађе времена у средњој школи. Као увод, подсетићемо на основне чињенице о инверзним функцијама уопште које ће нам у даљем бити потребне.

1. Инверзна функција

Ако је $f\colon A \to B$ произвољна функција, познато је да она неће увек имати *инверзну функцију*, тј. неће увек постојати функција $g\colon B \to A$, таква да за свако $x \in A$ важи $g(f(x)) = x$ и за свако $y \in B$ важи $f(g(y)) = y$. Да би таква функција постојала, неопходно је и довољно да дата функција f буде *бијекција* (тј. „1–1“ и „на“), сл. 1.

Сл. 1

Сл. 2

Код реалних функција реалне променљиве постоји једноставан критеријум за испитивање тог услова.

Став 1. *Нека је* $f\colon A \to B$ *реална функција реалне промењиве (тј.* A, $B \subset \mathbf{R}$*) која је строго монотона и „на“. Тада постоји инверзна функција* $g\colon B \to A$ *функције* f *и она има исти смисао монотоности као и функција* f.

Доказ. Да бисмо доказали да функција f има инверзну, довољно је доказати да је она „1–1“, тј. да из $x_1 \neq x_2$ следи $f(x_1) \neq f(x_2)$. Нека је $x_1 \neq x_2$; на пример, нека је $x_1 < x_2$. Онда из строге монотоности функције f следи да је $f(x_1) < f(x_2)$, сл. 2(а), или $f(x_1) > f(x_2)$, сл. 2(б), тј. свакако $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тиме је доказано да је f бијекција, тј. да има инверзну функцију, назовимо је g.

Претпоставимо да је, на пример, f строго растућа функција, сл. 2(а), и докажимо да је и g строго растућа (случај строго опадајуће функције разматра се аналогно). Нека су y_1, $y_2 \in B$ и $y_1 < y_2$. Морају постојати елементи x_1, $x_2 \in A$, такви да је $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. По дефиницији инверзне функције, управо је $g(y_1) = x_1$ и $g(y_2) = x_2$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $g(y_1) \geqslant g(y_2)$, тј. $x_1 \geqslant x_2$. Тада је и $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, супротно претпоставци. Добијена контрадикција доказује теорему. ■

Подсетимо се да приликом задавања неке функције морамо најпре задати њен домен и кодомен, а затим правило пресликавања. Другим речима, функција $f\colon A \to B$ се може схватити као тројка (A, B, f) и две функције су једнаке само ако су им једнаке све одговарајуће компоненте тих тројки. Међутим, када се ради о реалним функцијама реалне променљиве које се задају одређеним формулама (посебно када се ради о елементарним функцијама), обично прихватамо следећу конвенцију: ако се не наведу домен и кодомен функције задате формулом $y = f(x)$, тада подразумевамо да је домен највећи подскуп скупа $\mathbf{R}$ који израз $f(x)$ допушта, тј.

$$\{\, x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ је дефинисано} \,\}.$$

Што се кодомена тиче, за њега се подразумева да је једнак $\mathbf{R}$, ако се другачије не нагласи.

Нас ће највише интересовати питање формулског одређивања закона кореспонденције инверзне функције. Ако је дата нека функција $y = f(x)$, да би се добила њена инверзна функција (ако она постоји), треба једначину $y = f(x)$ „решити по x“, тј. приказати у облику $x = g(y)$. Могућност таквог (једнозначног) решавања је управо еквивалентна бијективности функције f.

Пример 1. Наћи инверзну функцију функције $f(x) = 3x - 5$.

Да је функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дата изразом $f(x) = 3x - 5$ бијекција, лако је проверити. Уместо формалног проверавања услова који дефинишу својства „1–1“ и „на“, довољно је констатовати да једначина $y = 3x - 5$ за свако реално y има јединствено решење $x = \dfrac{y+5}{3}$. На тај начин, инверзна функција g функције f дата је изразом $g(y) = \dfrac{y+5}{3}$. △

Пример 2. Функција $f(x) = x^2$, посматрана као функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, нема инверзну функцију, јер једначина $y = x^2$:

1° за $y < 0$ нема решења;

2° за $y > 0$ има два решења $x = \pm\sqrt{y}$.

Ако бисмо ипак желели да посматрамо функцију која би била инверзна за функцију $f(x) = x^2$, морали бисмо на погодан начин да изаберемо њен домен и кодомен. Наводимо две могућности за то:

(а) Нека $f\colon \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. Тада једначина $y = x^2$ има јединствено решење које означавамо са $x = \sqrt{y}$, тј. инверзна функција $g_1\colon \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ дата је са $g_1(y) = \sqrt{y}$ за $y \geqslant 0$.

(б) Нека $f\colon \mathbf{R}^- \cup \{0\} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. Решења једначине $y = x^2$ је (због $x \leqslant 0$) поново јединствено и износи $x = -\sqrt{y}$, па је сада инверзна функција дата са $g_2(y) = -\sqrt{y}$ за $y \geqslant 0$ и $g_2\colon \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}^- \cup \{0\}$. $\triangle$

Ако желимо да конструишемо графике међусобно инверзних функција f и g у истом координатном систему, онда морамо њихове аргументе означити истим словом. У том циљу, после решавања једначине $y = f(x)$ и њеног представљања у облику $x = g(y)$, треба променити места словима x и y, после чега добијамо израз за инверзну функцију у облику $y = g(x)$. Ако затим конструишемо графике функција f и g, закључићемо да важи

Сл. 3 Сл. 4

Став 2. *Графици узајамно инверзних функција f и g међусобно су симетрични у односу на симетралу првог и трећег квадранта.*

Доказ се своди на чињеницу да су тачке $(a, f(a))$ и $(f(a), a)$ симетричне у односу на поменуту симетралу, сл. 3. ■

На сликама 4 и 5(а), 5(б) графички су приказани примери 1 и 2(а), 2(б).

Поменимо још да монотоност, која је према теореми 1 довољан услов за постојање инверзне функције, није и неопходан услов за то.

Пример 3. Функција $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ има за домен скуп $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ и на њему *није* монотона (мада је строго растућа посебно на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$). Међутим, она ће ипак имати инверзну функцију, под условом да за то прилагодимо њен кодомен. Заиста, ако узмемо да $f\colon \mathbf{R}\setminus\{-1\} \to \mathbf{R}\setminus\{1\}$, треба уствари да решимо једначину $y = \dfrac{x}{x+1}$ за $y \neq 1$. То је увек могуће — решење је $x = \dfrac{y}{1-y}$, па променом места словима добијамо израз за инверзну функцију

$$y = g(x) = \frac{x}{1-x},$$

Сл. 5

при чему $g\colon \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Графици ових функција су дати на сл. 6. $\triangle$

Сл. 6

2. Инверзне тригонометријске функције

Функција синус, посматрана на свом природном домену, тј. функција

$$\sin\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

није бијективна — она није ни „1–1“, ни „на“. Док би се сурјективност могла постићи смањивањем кодомена (узимајући да је то сегмент $[-1,1]$), инјективност се не може обезбедити уз задржавање домена $\mathbf{R}$, с обзиром да функција sin није монотона, сл. 7. Слично важи и за остале основне тригонометријске функције cos, tg и ctg. Да бисмо добили функције које јесу бијекције, те имају инверзне, морамо на погодан начин да изаберемо њихове домене и кодомене.

Нека је f функција са доменом $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и кодоменом $[-1,1]$, тј. $f\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, дата формулом $f(x)=\sin x$. На основу познатих особина тригонометријских функција закључујемо да је та функција „на“, а такође и да је строго растућа, па самим тим и „1–1“. Дакле, та функција је бијективна,

Сл. 7

па има инверзну функцију $g\colon [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Вредност функције g у некој тачки $y \in [-1,1]$ означавамо са $\arcsin y$, тј. узимамо да је

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y, \quad \text{за } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y \in [-1,1].$$

На други начин то можемо написати и овако:

$$(1) \qquad \arcsin(\sin x) = x, \quad \text{за } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$(2) \qquad \sin(\arcsin y) = y, \quad \text{за } -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нагласимо одмах да су услови наведени уз једнакости (1) и (2) врло битни. Наиме, ако не би важило $-1 \leqslant y \leqslant 1$, лева страна једнакости (2) не би уопште имала смисла (а десна би!). „Још горе“, ако не би било $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, обе стране једнакости (1) би имале смисла, али једнакост не би била испуњена. На пример, за $x = \pi$ је $\sin\pi = 0$ и $\arcsin(\sin\pi) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

Да бисмо конструисали график новодобијене функције arcsin, извршимо замену слова, тј. посматрајмо функцију $y = \arcsin x$ за $x \in [-1,1]$. Користећи теорему 1 закључујемо да је она строго растућа, а узимајући у обзир и теорему 2 и познати график синусне функције добијамо њен график на сл. 8. Такође се лако изводе закључци (јасни са графика) о нули и знаку функције $y = \arcsin x$, као и о њеној непарности.

Сл. 8

Сл. 9

Пример 4. Доказати да је

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x \quad \text{за } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

Тврђење следи на основу познате особине синуса: $\sin(\pi - x) = \sin x$, ако се примети да је за $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ испуњено $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$. $\triangle$

Сличан поступак као за синус може се спровести за функцију $y = \cos x$. Њу треба посматрати као функцију са доменом $[0, \pi]$ и кодоменом $[-1, 1]$. Одговарајућа инверзна функција arccos ће пресликавати $[-1, 1]$ на $[0, \pi]$, тј. важиће

$$y = \cos x \iff x = \arccos y, \quad \text{за } x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1],$$

односно

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x, \quad \text{за } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \cos(\arccos y) &= y, \quad \text{за } -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned}$$

График те функције је на сл. 9.

Пример 5. На основу познате релације $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ закључујемо да важи $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ за $|x| \leqslant 1$. $\triangle$

Посматрајмо сада функцију $f(x) = \operatorname{tg} x$. За њу је погодно изабрати домен $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а кодомен $\mathbf{R}$. Користећи позната својства тангенса, тада закључујемо да тако добијамо бијективну функцију $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, чију инверзну функцију означимо са arctg. Дакле, $\operatorname{arctg}\colon \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и важи

$$y = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} y, \quad \text{за } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbf{R},$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x \quad \text{за } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) &= y \quad \text{за } y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Лако се изводе основне особине функције $y = \operatorname{arctg} x$ (оне се све илуструју и на њеном графику, сл. 10): она је непарна, строго растућа и ограничена ($|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$). Позитивна је за позитивне, а негативна за негативне вредности аргумента и има тачно једну нулу — тачку $x = 0$.

Пример 6. Доказати да за свако x, $y \in \mathbf{R}$ за које је $xy < 1$ важи

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}. \tag{3}$$

Сл. 10

Сл. 11

У познатој формули $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ ставимо $\alpha=\operatorname{arctg}x$, $\beta=\operatorname{arctg}y$ (што је дозвољено за $xy\neq 1$), па добијамо

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

Ако је при том и $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ (што је испуњено за $xy<1$), одатле следи формула (3). $\triangle$

Најзад, на сличан начин се уводи функција $\operatorname{arcctg}\colon \mathbf{R}\to(0,\pi)$, као инверзна функцији $\operatorname{ctg}\colon(0,\pi)\to\mathbf{R}$, сл. 11.

Пример 7. За свако $x\in\mathbf{R}$ важи $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$. $\triangle$

Задаци

1. Наћи инверзне функције следећих функција и нацртати њихове графике:

$$f(x)=1+\frac{1}{x},\quad f(x)=2^{-x},\quad f(x)=x^4\quad (f\colon(-\infty,0]\to[0,\infty)),$$
$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0),\quad f(x)=\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{за } -\infty<x<1,\\ x^2, & \text{за } 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & \text{за } 4<x<+\infty.\end{cases}$$

2. (а) Доказати да функција $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дата са $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ има инверзну функцију и наћи њен аналитички израз.

(б) Доказати да функција $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ нема инверзну функцију, али да је има функција са доменом $[0,\infty)$ и кодоменом $[1,\infty)$ и законом кореспонденције датим том истом формулом. Наћи формулу за ту инверзну функцију.

3. Наћи $\arcsin(\sin 3)$, $\operatorname{tg}(\arcsin 2/3)$.

4. (а) Доказати да је $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$ за $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{2}$.

(б) Доказати да је функција $f(x) = \arcsin(\sin x)$ периодична с основним периодом 2π. Скицирати график те функције.

5. Шта је инверзна функција функцији $y = \arcsin x$?

6. Доказати да је

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R};$$
$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

7. Доказати да је

$$\begin{aligned} &\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \cdots + \operatorname{arcctg}(2n+1) \\ &\qquad = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n} - n \operatorname{arctg} 1. \end{aligned}$$