

Др Владимир Мићић

САБИРАЊЕ У $\mathbf{Q}_0^+$

1. Овај чланак је наставак чланка: В. Мићић, Љ. Вуковић: *Један начин увођења разломака у наставу математике*, Настава математике XXXVIII, 1, и посвећен је интуитивном поимању ненегативних рационалних бројева (скуп Q_0^+) и операција сабирања и одузимања у том скупу.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{6} \qquad \frac{6}{18} \qquad \frac{2}{6} = \frac{6}{18}$$

Подсетимо се да смо уз одабрану јединицу, градуирану на подударне делове, означавали истакнуте (шрафиране) делове писањем одговарајућег разломка, протумачили смо правило о проширивању и скраћивању разломака и, користећи се једначењем на основу истог значења — представљања исте количине, дошли смо до правила упоређивања разломака у општем случају.

2. Увођењу разломака претходи обрада структуре $\mathbf{N}_0$ природних бројева са нулом, која је грађена постепено. Претпостављамо да су ученици стекли довољно искуства у активностима везаним за операције сабирања и множења у $\mathbf{N}_0$ и да можемо рачунати на њихове формиране навике у вези са поступцима који следе и на њихова тим искуствима артикулисана реаговања.

3. Обраду операције сабирања (и одузимања) почећемо полазећи од интуитивног схватања кодификовањем у три корака:

- (I) уочавање и означавање сабирака (у случају сабирања) односно умањеника и умањιοца (у случају одузимања);
- (II) писање израза (збира или разлике);
- (III) једначење са записом у виду једног разломка.

Пример који предлажемо може послужити као уводни задатак. При томе ћемо се користити програмираним поступцима у циљу навођења ученика да јасно уочи и учини наведена три корака. Тачкицама означавамо места на којима очекујемо да ученици упишу горње изразе.

ПРИМЕР. Аца и Браца су добили једнаке чоколаде. Сваки од њих се засладио по жељи, и појео одређени део своје чоколаде. На слици је шрафирањем

приказано који део своје чоколаде је појео сваки од њих. Колико су укупно појели?

(I)

Аца је појео $\dots \frac{7}{24} \dots$ чоколаде.

Браца је појео $\dots \frac{9}{24} \dots$ чоколаде.

(II)

Укупно су појели $\dots \frac{7}{24} \dots + \dots \frac{9}{24} \dots$ чоколаде.

(III)

Укупно су појели (бројимо шрафиране делове на оба места) $\dots \frac{16}{24} \dots$ чоколаде. Због тога је

$$\dots \frac{7}{24} \dots + \dots \frac{9}{24} \dots = \dots \frac{16}{24} \dots$$

Овде указујемо на чињеницу да смо имали две количине, означене разломцима, и да смо збиром тих разломака означили укупну количину. Исто тако истичемо да смо приликом бројања укупног броја шрафираних (поједених) делова пребројали 7 делова прве чоколаде и њима додали пребројаних 9 делова друге чоколаде. На тај начин смо нашли да је

$$\frac{7}{24} + \frac{9}{24} = \frac{7+9}{24},$$

$$\frac{7}{24} + \frac{9}{24} = \frac{16}{24}.$$

Исти пример можемо искористити да бисмо учинили још један корак, тзв. „прелаз преко јединице“. Постављамо ново питање: Колико им је укупно чоколаде остало?

(I)

Аци је преостало $\dots \frac{17}{24} \dots$ чоколаде.

Браци је преостало $\dots \frac{15}{24} \dots$ чоколаде.

(II)

Укупно им је преостало $\dots \frac{17}{24} \dots + \dots \frac{15}{24} \dots$ чоколаде.

(III)

 $\frac{32}{24}$

Укупно им је преостало (бројимо нештрафиране делове на оба места) $\dots \frac{32}{24} \dots$ чоколаде. Због тога је

$$\dots \frac{17}{24} \dots + \dots \frac{15}{24} \dots = \dots \frac{32}{24} \dots$$

Указујемо на чињеницу да је

$$\frac{17}{24} + \frac{15}{24} = \frac{17+15}{24}.$$

Непосредним пребројавањем преосталих делова (њих 32) уверавамо се да, због $32 = 24 + 8$, од њих можемо формирати једну целу таблу чоколаде (за то нам треба 24 делића, дакле $\frac{24}{24}$ чоколаде) и преостаје $\frac{8}{24}$ чоколаде. Стога је

$$\frac{32}{24} = 1 + \frac{8}{24}.$$

Овде ученик може нацртати нову слику, која ће илустровати ову једнакост. Са ње се види оно што смо мало пре истакли, тј. да од 32 нештрафирана делића можемо заиста направити једну целу чоколаду и да преостаје 8 делића, дакле $\frac{8}{24}$ чоколаде, па

им је укупно остало $1 + \frac{8}{24}$ чоколаде.

У практичном раду треба урадити више примера везаних за сабирање разломака једнаких именилаца, користећи се у почетку конкретним садржајима (погачама, тепсијама колача и сл.) а затим се од њих одвајајући, укључујући и разломке са бројиоцем већим од имениоца. При томе се не мора (и не треба) ограничити на два сабирка.

Напомена. У вези са разломцима чији је бројилац већи од имениоца, ми се, кроз примере, у ствари бавимо њиховим представљањем у облику

$$\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m, k, r \in \mathbf{N}_0, \quad 0 \leq r < n,$$

што је еквивалентно једнакости

$$m = nk + r.$$

Она ће бити предмет нашег интересовања касније, и на овоме месту је не треба истицати. Довољно је илустровати је кроз неколико конкретних примера. При томе се свакако морају истаћи једнакости типа

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots \left(= \frac{n}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right),$$

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots \left(= \frac{2n}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right), \dots,$$

у општем случају, за свако $k \in \mathbf{N}_0$,

$$k = \frac{k}{1} = \frac{2k}{2} = \frac{3k}{3} = \dots \left(= \frac{kn}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right).$$

Оне везују структуру $\mathbf{N}_0$ за структуру $\mathbf{Q}_0^+$ у смислу инклузије $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Q}_0^+$.

4. Следећи корак је сабирање разломака неједнаких именилаца. Вратимо се, опет, чоколадама и позабавимо се следећим примером.

ПРИМЕР. Весна и Гордана су добиле једнаке чоколаде. Свака од њих се за-
сладила по жељи и појела одређени део своје чоколаде. На слици је шрафирањем
приказано да је Весна појела две „штангле“ а Гордана пет „коцкица“. Колико
чоколаде су укупно појеле? Колико им је остало?

$\frac{2}{6}$
Весна је појела ... $\frac{2}{6}$... чоколаде.

$\frac{5}{24}$
Гордана је појела ... $\frac{5}{24}$... чоколаде.

Наводимо ученике да Веснине $\frac{2}{6}$ поједене чоколаде (2 „штангле“) изразе у
„коцкицама“. Они ће, без тешкоћа, уочити да је

$$\frac{2}{6} = \frac{8}{24},$$

што значи да је Весна појела 8 „коцкица“. Укупно су њих две појеле 13 коцкица

$\frac{13}{24}$
чоколаде, односно ... $\frac{13}{24}$... чоколаде.

Дакле,

$$\frac{2}{6} + \frac{5}{24} = \frac{8}{24} + \frac{5}{24} = \frac{13}{24}.$$

Весни је преостало 4 штангле, дакле $\frac{4}{6}$ чоколаде, а Гордани 19 коцкица,
дакле $\frac{19}{24}$ чоколаде. Укупно им је преостало

$$\frac{4}{6} + \frac{19}{24} = \frac{16}{24} + \frac{19}{24} = \frac{35}{24},$$

дакле, преостало им је $\frac{35}{24}$ чоколаде. Како је

$$\begin{aligned} \frac{35}{24} &= \frac{24}{24} + \frac{11}{24}, \\ \frac{35}{24} &= 1 + \frac{11}{24}, \end{aligned}$$

преостала им је једна цела табла и једанаест коцкица.

Са неколико сличних примера индукујемо поступак сабирања разломака неједнаких именилаца:

$$\begin{aligned}\frac{k}{l} + \frac{m}{n} &= \frac{kn}{ln} + \frac{ml}{nl} \\ &= \frac{kn + ml}{ln}.\end{aligned}$$

Предлажемо да се са традиционалним тражењем најмањег заједничког садржаоца за имениоце l и n сачека. Поступак

$$\begin{aligned}\frac{11}{15} + \frac{7}{12} &= \frac{11 \cdot 12}{15 \cdot 12} + \frac{7 \cdot 15}{12 \cdot 15} \\ &= \frac{11 \cdot 12 + 7 \cdot 15}{12 \cdot 15} \\ &= \frac{237}{180} \\ &= \frac{79}{60}\end{aligned}$$

је, по нашем мишљењу, инструктивнији од

$$\begin{aligned}\frac{11}{15} + \frac{7}{12} &= \frac{44}{60} + \frac{35}{60} \\ &= \frac{79}{60}\end{aligned}$$

у почетној фази обраде сабирања разломака.

Јасно је да, у циљу постизања веће оперативности, касније треба укључити и поступак са налажењем најмањег заједничког садржаоца.

5. Већ смо истакли да се приликом увођења нове структуре руководимо и принципом одржања важних својстава структуре коју проширујемо, тзв. принцип перманенције. Ако уочимо једнакости

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + ml}{ln} = \frac{ml + kn}{nl} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l},$$

што следи из комутативности операција сабирања и множења у $\mathbf{N}_0$, примећујемо да и даље важи комутативни закон. На сличан начин се уверавамо и да је важност асоцијативног закона за операцију сабирања сачувана. Наглашавамо да се ове чињенице могу истаћи на лежеран начин, не оптерећујући њима ученике при овом, првом сусрету са стварним проширивањем неке структуре.

6. Као што је већ истакнуто, операцију одузимања у скупу ненегативних разломака остварујемо у три корака:

- (I) уочавамо и означавамо умањеник и умањилац;
- (II) записујемо разлику;
- (III) једначењем је записујемо у облику разломка.

У ствари записивање разлике је наше реаговање на ситуације које можемо моделирати према схеми: од дате количине одвајамо (одстрањујемо) одређени део па уочавамо преостали део. Подесним градуирањем дату количину и део који од ње одвајамо означавамо разломцима и на основу њих означавамо разломком преостали део. Илуструјемо ово примером са нашом чоколадом.

ПРИМЕР. Душан је имао $\frac{17}{24}$ табле чоколаде приказане на слици. Наишао је његов друг Ђорђе и он му је поклонио $\frac{5}{24}$ те чоколаде. Колико је Душану остало чоколаде?

Табла се састоји од 24 коцкице, па $\frac{1}{24}$ чоколаде представља 1 коцкицу, $\frac{17}{24}$ чоколаде представља 17 коцкица а $\frac{5}{24}$ чоколаде 5 коцкица. Означавањем уз одговарајуће слике, при чему се користимо инваријантношћу количине од начина на који је смештена, долазимо до слика које следе и уз њих записаних ознака за шрафиране делове.

$$\frac{17}{24}$$

$$\frac{5}{24}$$

$$\frac{17}{24} - \frac{5}{24}$$

Душану остаје $\dots \frac{17}{24} - \frac{5}{24} \dots$ чоколаде, а то је $\dots \frac{12}{24} \dots$ чоколаде (пребројали смо преостале коцкице). Сада пишемо једнакости

$$\begin{aligned} \frac{17}{24} - \frac{5}{24} &= \frac{12}{24}, \\ \frac{17}{24} - \frac{5}{24} &= \frac{17-5}{24}. \end{aligned}$$

Сличним примерима осмишљавамо одузимање разломака и без тешкоћа индукујемо једнакост

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{n} = \frac{m-k}{n},$$

у ствари правило за одузимање разломака једнаких именилаца, уз услов $m > k$. У предложеној схеми овај услов је испуњен јер се одстрањује део дате количине.

Одузимање разломака неједнаких именилаца тече на исти начин као сабирање, па то овде нећемо поново излагати.

7. Последњи пример са чоколадом омогућава нам да, на основу слика које га прате, уз евентуално објашњење: „Ако Душан преосталом делу чоколаде дода део који је дао Ђорђу, вратиће се на старо, тј. имаће опет $\frac{17}{24}$ чоколаде“, мало осветлимо везу између сабирања и одузимања. Једнакости

$$\frac{17}{24} - \frac{5}{24} = \frac{12}{24}$$

је „равноправна“ једнакост

$$\frac{12}{24} + \frac{5}{24} = \frac{17}{24}.$$

У ствари, под везом, између сабирања и одузимања подразумевамо еквивалентност једнакости

$$a + b = c, \quad a = c - b, \quad b = c - a,$$

што значи да тачност било које од њих повлачи тачност остале две.

Знамо да се у скупу $\mathbf{Q}$ рационалних бројева одузимање своди на додавање супротног елемента. У оквиру структуре $\mathbf{Q}_0^+$ еквивалентност ових једнакости је облик исказивања закона о супротном елементу, који је непотпун јер важи уз неопходна ограничења. Имајући у виду искуство које ученици доносе из претходних разреда (у вези са $\mathbf{N}_0$), може се очекивати да ће спонтано бити прихваћена ова еквиваленција.

На основу поменуте еквивалентности решавамо у $\mathbf{Q}_0^+$ једначине облика $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $a, b \in \mathbf{Q}_0^+$. На пример,

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} + x &= \frac{5}{2} \\ x &= \frac{5}{2} - \frac{3}{7} \\ x &= \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} \\ x &= \frac{35}{14} - \frac{6}{14} \\ x &= \frac{29}{14}. \end{aligned}$$

Тиме се повезују операције сабирања и одузимања и подстиче прихватање те еквивалентности. И, што је важно, решавају се једначине.