Др Павле Младеновић

ПРЕБРОЈАВАЊЕ КОНАЧНИХ СКУПОВА

1. Увод

Почећу ово излагање[1] једним примером комбинаторног задатка, а касније ћу навести разлог који ме је навео да почнем са овим примером (видети напомену на стр. 10).

Задатак. *На колико начина се* 8 *истих оловака,* 9 *истих свезака и* 10 *истих књига могу поделити тројици ученика, тако да сваки од њих добије бар један предмет сваке врсте?*

Овај задатак може решити ученик четвртог разреда гимназије, на пример, на следећи начин: На следећој слици приказана је подела 8 истих оловака тројици ученика, тако да први ученик добије две, други четири и трећи две оловке.

$$\bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet$$

Подела је графички приказана тако што су оловке нацртане, поређане у низ и двема вертикалним цртама означена места на којима треба „пресећи“ тај низ. На сличан начин може бити представљена и свака друга подела 8 оловака. При томе, има 7 места на којима може бити постављена црта, а од тих 7 места бирамо два. То се може урадити на $\binom{7}{2} = 21$ начина. Аналогно, 9 истих свезака могу се поделити тројици ученика на $\binom{8}{2} = 28$ начина, а 10 истих књига могу се поделити тројици ученика на $\binom{9}{2} = 36$ начина. Како сваку поделу оловака можемо „комбиновати“ са сваком поделом свезака и сваком поделом књига, то је тражени број подела оловака, свезака и књига једнак

$$\binom{7}{2}\binom{8}{2}\binom{9}{2} = 21 \cdot 28 \cdot 36 = 21\,168.$$

[1] Предавање одржано на Републичком семинару о настави математике у основној школи, средњим школама, на вишим школама и на факултетима, 16. јануара 1993. године у секцији за основне школе.

2. Примери пебројавања коначних скупова

Покажимо помоћу неколико једноставнијих примера како се ученику основне школе може помоћи да реши задатак формулисан у уводу.

Пример 1. На колико начина се 7 истих оловака може поделити двојици ученика, тако да сваки добије бар једну оловку?

Решење. Могућне поделе су $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$, при чему први сабирак увек означава број оловака које добија први ученик. Према томе, постоји 6 различитих подела.

Пример 2. На колико начина се тројици ученика може поделити 8 истих оловака, тако да први добије тачно једну, а да сваки од остале двојице добије бар једну?

Решење. Ако првом ученику дамо једну оловку, онда осталој двојици треба поделити 7 оловака, а то се према претходном примеру може урадити на 6 начина.

Пример 3. На колико начина се тројици ученика може поделити 8 истих оловака, тако да сваки од њих добије бар једну оловку?

Решење задатка дато је у следећој табели:

Први добија	Други и трећи добијају	Број подела
1 оловку	$1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1$	6 подела
2 оловке	$1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1$	5 подела
3 оловке	$1+4, 2+3, 3+2, 4+1$	4 поделе
4 оловке	$1+3, 2+2, 3+1$	3 поделе
5 оловака	$1+2, 2+1$	2 поделе
6 оловака	$1+1$	1 подела
	Укупно	21 подела

Друго решење. Осам оловака поређамо у низ и у размацима између оловака, којих има 7, треба поставити две „преграде“ као на следећој слици.

$$\bullet\ ^{1}\ \bullet\ ^{2}|\ \bullet\ ^{3}\ \bullet\ ^{4}\ \bullet\ ^{5}\ \bullet\ ^{6}|\ \bullet\ ^{7}\ \bullet$$

Означимо те размаке бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Подела на слици одређена је размацима 2 и 6, тј. бројем 26. Све поделе дате су следећим бројевима

12, 13, 14, 15, 16, 17,
23, 24, 25, 26, 27,
34, 35, 36, 37,
45, 46, 47,
56, 57,
67.

Тих двоцифрених бројева има 21, па је и број подела 8 истих оловака тројици ученика, тако да сваки од њих добије бар једну оловку, једнак 21.

Пример 4. Између градова A и B има три директна пута, између градова B и C има два директна пута, а између градова C и D има два директна пута.

(а) На колико начина се из града A може доћу у град C?

(б) На колико начина се из града A може доћу у град D?

Решење. Означимо путеве између A и B бројевима 1, 2 и 3, путеве између B и C бројевима 4 и 5, а путеве између C и D бројевима 6 и 7, као на следећој слици:

(а) Једноставно можемо записати све путеве између A и C. То су: 14, 15, 24, 25, 34, 35. Тих путева има $6 = 3 \cdot 2$, тј. број путева између A и C једнак је производу броја путева између A и B и броја путева између B и C.

(б) Сви путеви између A и D су: 146, 147, 156, 157, 246, 247, 256, 257, 346, 347, 356, 357. Тих путева има $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, тј. број путева између A и D једнак је производу броја путева између A и B, броја путева између B и C и броја путева између C и D.

Пример 5. Размотримо поново задатак формулисан у уводном делу: *На колико начина се 8 истих оловака, 9 истих свезака и 10 истих књига могу поделити тројици ученика, тако да сваки од њих добије бар један предмет сваке врсте.*

Решење. У примеру 3 смо видели да се 8 истих оловака могу поделити тројици ученика на $1+2+3+4+5+6 = 21$ начин. Аналогно добијамо да се 9 истих свезака могу поделити тројици ученика на $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ начина, а да се 10 истих књига могу поделити тријици ученика на $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ начина. Аналогно као код одређивања броја путева између градова A и D у примеру 4, добијамо да је број подела 8 оловака, 9 свезака и 10 књига тројици ученика једнак $21 \cdot 28 \cdot 36 = 21\,168$.

Напомена. Задатак из уводног дела и примера 5 био је предложен на пријемном испиту за упис на студије математике на Математичком факултету у Београду у јуну 1988. године. На том испиту је за 265 места конкурисало око 300 свршених ученика средње школе. Они су решавали и наведени задатак и резултат на том задатку је био да је 6 (шест) ученика дало тачно решење, што је око 2% укупног броја.

3. Основна правила комбинаторике

При одређивању броја елемената скупа A елементима тог скупа придружују се редом природни бројеви 1, 2, 3, ... Ако се то придруживање завршава бројем n, онда кажемо да скуп A има n елемената.

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet \end{array}}$$

Чињеницу да скуп A има n елемената означаваћемо овако: $|A| = n$.

На основу примера које смо разматрали у претходном параграфу можемо формулисати неколико основних комбинаторних правила која се на врло згодан начин могу користити приликом одређивања броја елемената коначних скупова.

Правило једнаког броја. *Ако се међу елементима скупова A и B може успоставити обострано једнозначно придруживање, онда скупови A и B имају исти број елемената, тј важи једнакост $|A| = |B|$.*

Илустрацију овог правила даје следећа слика:

$$A \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \bullet & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet \end{array}}$$

$$B \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{array}}$$

Правило једнаког броја користимо у ситуацији када желимо да одредимо број елемената неког скупа B, при чему умемо да успоставимо обострано једнозначну везу његових елемената са елементима скупа A, чији нам је број елемената познат или га је лакше одредити.

Рецимо, у примеру 3 (види друго решење), требало је одредити колико има подела 8 оловака тројици ученика, а ми смо тај задатак свели на одређивање колико има двоцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и код којих је прва цифра мања од друге.

Иако је формулација овог правила сасвим једноставна, а тврђење врло блиско интуицији, његова примена не мора бити једноставна. Разлог је у томе што за успешну примену овог правила треба *препознати* елементе које пребројавамо. Другим речима, приликом решавања конкретног комбинаторног задатка пребројавања елемената, треба занемарити небитна својства и чињенице које фигуришу у формулацији, него им придружити апстрактне елементе које лако пребројавамо. Тако смо у другом решењу задатка из примера 3 из „гомиле“ у којој се налазе оловке, свеске, књиге, ученици којима делимо оловке и услова под којима се врши деоба, издвојили скуп двоцифрених бројева чији број елемената лако одређујемо.

Правило збира. *Ако елементе неког скупа* A *можемо распоредити у неколико међусобно дисјунктних скупова* $A_1, A_2, \ldots, A_k$*, онда је број елемената скупа* A *једнак збиру броја елемената скупа* A_1*, броја елемената скупа* $A_2, \ldots$ *и броја елемената скупа* A_k*, тј важи једнакост*

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Рецимо, у првом решењу задатка из примера 3, све поделе 8 оловака тројици ученика чине скуп A. Тај скуп смо разбили на подскупове $A_1, A_2, \ldots, A_6$, при чему подскуп A_1 садржи оне поделе код којих први ученик добија једну оловку, подскуп A_2 садржи оне поделе код којих први ученик добија две оловке итд.

Правило производа. *Ако први поступак (радњу) можемо обавити на* m *начина, а други поступак (радњу) можемо обавити на* n *начина, онда и први и други поступак можемо обавити на* mn *начина.*

Ово правило применили смо код решавања задатка из примера 4 (а). Аналогно се може формулисати правило производа за више од две радње које се могу обавити на већи број начина.

Пример 6. Колико има четвороцифрених бројева који су дељиви са 5 и у чијем запису нема понављања цифара?

Решење. Нека је A_1 скуп четвороцифрених бројева у чијем запису нема понављања цифара и који се завршавају цифром 0. Прва цифра броја из скупа A_1 може бити изабрана на 9 начина, друга на 8 начина и трећа на 7 начина. На основу правила производа добијамо да скуп A_1 садржи тачно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ бројева. Нека је A_2 скуп четвороцифрених бројева у чијем запису нема понављања цифара и који се завршавају цифром 5. Прва цифра броја из скупа A_1 може бити изабрана на 8 начина, друга на 8 начина и трећа на 7 начина. На основу правила производа добијамо да скуп A_2 садржи тачно $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ бројева. На основу правила збира тражени број једнак је $504 + 448 = 952$.

4. Задаци

1. У равни је дато 7 тачака, тако да никоје три не припадају једној правој. Колико је правих одређено овим тачкама?

2. У равни је дато 7 правих, тако да никоје две од њих нису паралелне, а никоје три се не секу у истој тачки. Колико има пресечних тачака ових правих?

3. Колико дијагонала има седмоугао?

4. У одељењу има 20 ученика. На колико начина могу бити изабрани председник, секретар и благајник одељењске заједнице?

5. Колико има петоцифрених бројева који се записују помоћу пет различитих цифара?