**Др Војислав Петровић**

# ПТОЛОМЕЈЕВА ТЕОРЕМА И НЕКЕ ЊЕНЕ ПРИМЕНЕ[1]

Ако би се правила листа најважнијих планиметријских фигура, тетивни четвороуглови би сигурно заузели једно од челних места. Тешко да би и било могуће да се наведу све теореме у којима се та класа четвороуглова користи. Овај чланак посвећен је једној особини тетивних четвороуглова, недовољно присутној у настави геометрије — Птоломејевој теореми и неким интересантним последицама.

**Теорема 1.** (Птоломеј) *Производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа његових наспрамних страница.*

*Доказ.* Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао и $k$ кружница описана око њега. Уочимо на дијагонали $AC$ тачку $E$ такву да је $\angle ADE \cong \angle BDC$, сл. 1. Како је и $\angle DAC \cong \angle DBC$ (периферијски углови над луком $DC$), троуглови $ADB$ и $BDC$ су слични, одакле је $|AE| : |AD| = |BC| : |BD|$, односно

(1) $$|AE| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

Аналогно из $\angle EDC \cong \angle ADB$ и $\angle ECD \cong \angle ABD$ следи $\triangle ECD \sim \triangle ABD$, а одатле $|EC| : |AB| = |CD| : |BD|$, односно

(2) $$|EC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD|.$$

Сл. 1

Сабирањем релација (1) и (2) добијамо

(3) $$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|,$$

што је и требало да се докаже. ∎

Вредно је да се спомене да услов (3) није само потребан него и довољан да конвексан четвороугао $ABCD$ буде тетиван. Истина доказ је нешто сложенији иако се користи слична техника. Ипак тај услов није од већег значаја за „практичне потребе“. Наиме ако некоме пође за руком да покаже да важи (3), тада се о четвороуглу $ABCD$ обично толико зна да његова тетивност следи из неког једноставнијег критеријума као што је рецимо суплементарност наспрамних

[1] Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства 15. 01. 1993.

углова, подударност углова из којих се једна страница види из два наспрамна темена и слично.

За примере који би илустровали примену Птоломејеве теореме одабране су две групе проблема од којих свака за себе чини једну малу целину. Прва група почиње једним једноставним тврђењем које се иначе доказује сасвим елементарним средствима у оквиру редовног школског курса. Разумљиво, овде се користи Птоломејева теорема.

**Теорема 2.** *Нека је $M$ тачка мањег лука $A_1A_3$ кружнице $k$ описане око једнакостраничног троугла $A_1A_2A_3$. Тада је*

$$|MA_1| + |MA_3| = |MA_2|.$$

*Доказ.* Тривијалан — на тетивни четвороугао $MA_1A_2A_3$ примени се Птоломејева теорема. ∎

Оно што се природно намеће у овом моменту је питање могућег уопштења овог тврђења. Наиме, да ли слично тврђење важи и за произвољан правилан $n$-угао ($n > 3$)? Нажалост одговор је „не“ за $n = 4$. За правилан четвороугао, тј. квадрат, нема неког сличног тврђења које се односи на све тачке једног од четири лука кружнице описане око њега. То може врло просто да се провери.

Ипак, ако направимо још један корак напред суочавамо се с правилним 5-углом за који смо у стању да докажемо следеће тврђење.

**Теорема 3.** *Нека је $M$ тачка мањег лука $A_1A_5$ кружнице описане око правилног 5-угла $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тада је*

$$|MA_1| + |MA_3| + |MA_5| = |MA_2| + |MA_4|.$$

*Доказ.* Обележимо са $a$ страницу и са $b$ дијагоналу правилног 5-угла $A_1A_2A_3A_4A_5$ (све дијагонале правилног 5-угла су међусобно подударне). Ако сад на сваки од четвороуглова (очигледно тетивних) $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_5$, $A_4A_5MA_1$, $A_5MA_1A_2$ применимо Птоломејеву теорему, добијамо редом

$$\begin{aligned}
|MA_1| \cdot a + |MA_3| \cdot a &= |MA_2| \cdot b, \\
|MA_3| \cdot b &= |MA_2| \cdot a + |MA_4| \cdot a, \\
|MA_3| \cdot a + |MA_5| \cdot a &= |MA_4| \cdot b, \\
|MA_5| \cdot b + |MA_1| \cdot a &= |MA_4| \cdot a, \\
|MA_1| \cdot b + |MA_5| \cdot a &= |MA_2| \cdot a.
\end{aligned}$$

Када саберемо ових пет једнакости добијамо

$$(2a + b)(|MA_1| + |MA_3| + |MA_5|) = (2a + b)(|MA_2| + |MA_4|)$$

и одатле

$$|MA_1| + |MA_3| + |MA_5| = |MA_2| + |MA_4|. \quad ∎$$

Сада нас много не брине што за правилан 6-угао, као уосталом и за квадрат, аналогно тврђење не важи. Више није потребно много интуиције и маште да се формулише најопштији став.

**Теорема 4.** *Нека је $M$ тачка мањег лука $A_1A_{2n+1}$ кружнице описане око правилног $(2n+1)$-угла $A_1A_2\dots A_{2n+1}$ $(n\geqslant 1)$. Тада је*

$$|MA_1|+|MA_3|+\cdots+|MA_{2n+1}|=|MA_2|+|MA_4|+\cdots+|MA_{2n}|.$$

*Доказ.* Слично као у доказу претходне теореме означимо са $a$ страницу, са $b$ најмању дијагоналу правилног $(2n+1)$-угла $A_1A_2\dots A_{2n+1}$ и применимо Птоломејеву теорему на четвороуглове $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4$, $\dots$, $MA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$, $A_{2n}A_{2n+1}MA_1$, $A_{2n+1}MA_1A_2$. Добијамо редом

$$\begin{aligned}
|MA_1|\cdot a+|MA_3|\cdot a&=|MA_2|\cdot b,\\
|MA_3|\cdot b&=|MA_2|\cdot a+|MA_4|\cdot b,\\
|MA_3|\cdot a+|MA_5|\cdot a&=|MA_4|\cdot b,\\
|MA_5|\cdot b&=|MA_4|\cdot a+|MA_6|\cdot b,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
|MA_{2n-1}|\cdot a+|MA_{2n+1}|\cdot a&=|MA_{2n}|\cdot b,\\
|MA_{2n+1}|\cdot b+|MA_1|\cdot a&=|MA_{2n}|\cdot b,\\
|MA_1|\cdot b+|MA_{2n+1}|\cdot a&=|MA_2|\cdot a,
\end{aligned}$$

односно

$$(2a+b)(|MA_1|+|MA_3|+\cdots+|MA_{2n+1}|)=(2a+b)(|MA_2|+|MA_4|+\cdots+|MA_{2n}|).$$

Отуда је

$$|MA_1|+|MA_3|+\cdots+|MA_{2n+1}|=|MA_2|+|MA_4|+\cdots+|MA_{2n}|. \qquad \blacksquare$$

За другу групу проблема кључно је следеће нимало очевидно тврђење које и само за себе представља један интересантан и вредан пажње резултат.

**Теорема 5.** *Ако је $O$ центар кружнице описане око $\triangle A_1A_2A_3$ и $d_1$, $d_2$, $d_3$ су растојања тачке $O$ од страница $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$, редом, тада је*

$$\pm d_1\pm d_2\pm d_3=R+r,$$

*где су $R$ и $r$ полупречници описане односно уписане кружнице у $\triangle A_1A_2A_3$, док је знак уз $d_i$ „$+$“ уколико су тачка $O$ и теме $A_i$ са исте стране праве $A_jA_k$ и „$-$“ у супротном.*

*Доказ.* Обележимо са $B_1$, $B_2$, $B_3$ средине страница $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$, редом. Те тачке су истовремено и подножја нормала из центра $O$ на странице троугла $A_1A_2A_3$. Нека је даље $|A_2A_3|=a_1$, $|A_3A_1|=a_2$, $|A_1A_2|=a_3$.

Узмимо прво да је $\triangle A_1A_2A_3$ оштроугли, сл. 2. Примењујући Птоломејеву теорему на тетивне четвороуглове $OB_1A_3B_2$, $OB_2A_1B_3$, $OB_3A_2B_1$ добијамо редом

$$(a_2/2)d_1+(a_1/2)d_2=(a_3/2)R, \tag{4}$$

$$(a_3/2)d_2+(a_2/2)d_3=(a_1/2)R, \tag{5}$$

$$(a_1/2)d_3+(a_3/2)d_1=(a_2/2)R. \tag{6}$$

С обзиром да је $O$ унутрашња тачка $\triangle A_1A_2A_3$, збир површина троуглова $OA_2A_3$, $OA_3A_1$, $OA_1A_2$ једнак је површини $\triangle A_1A_2A_3$. Отуда је

$$(a_1/2)d_1 + (a_2/2)d_2 + (a_3/2)d_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)r. \tag{7}$$

Из (4), (5), (6), (7) следи

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(R + r),$$

односно $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$.

Сл. 2

Сл. 3

Ако је $\triangle A_1A_2A_3$ тупоугли са тупим углом код $A_1$, сл. 3, тада уместо (4), (5), (6), (7) имамо

$$\begin{aligned}
(a_2/2)d_1 + (a_3/2)R &= (a_1/2)d_2,\\
(a_3/2)d_2 + (a_2/2)d_3 &= (a_1/2)R,\\
(a_2/2)R + (a_3/2)d_1 &= (a_1/2)d_3,\\
-(a_1/2)d_1 + (a_2/2)d_2 + (a_3/2)d_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)r,
\end{aligned}$$

јер је сада тачка $O$ изван $\triangle A_1A_2A_3$ и његова површина једнака је збиру површина троуглова $OA_3A_1$ и $OA_1A_2$, умањеном за површину $\triangle OA_2A_3$. Тако добијамо

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(-d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(R + r),$$

односно $-d_1 + d_2 + d_3 = R + r$.

Ако је туп угао код $A_2$ или $A_3$, добија се формула слична претходној, само што је знак $-$ испред $d_2$ односно $d_3$. Запазимо и то да највише један од сабирака $d_1$, $d_2$, $d_3$ може да буде негативан. То је управо онај $d_i$ за који је $\angle A_i$ туп.

Случај правоуглог троугла који се практично третира као први случај оставља се читаоцу као вежба. ■

Овај резултат има лепу последицу у виду следећег тврђења.

**Теорема 6.** *У тетивном четвороуглу $ABCD$ збир полупречника кружница уписаних у троуглове $ABC$ и $ADC$ једнак је збиру полупречника кружница уписаних у троуглове $ABD$ и $BCD$.*

*Доказ.* Нека је $O$ центар кружнице описане око четвороугла $ABCD$ и нека су $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ и $e$, $f$ растојања тачке $O$ од страница $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ и дијагонала $AC$ и $BD$, редом. Ако са $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ обележимо полупречнике кружница уписаних у троуглове $ABC$, $ADC$, $ABD$, $BCD$, редом, и са $R$ полупречник кружнице описане око четвороугла $ABCD$, тада на основу теореме 5 имамо

$$r_1 + r_2 = (d_1 + d_2 \pm e - R) + (d_3 + d_4 \mp e - R),$$
$$r_3 + r_4 = (d_1 + d_4 \pm f - R) + (d_2 + d_3 \mp f - R).$$

Заиста, ако су тачке $O$ и $B$ са исте стране дијагонале $AC$, тада су $O$ и $D$ са разних страна $AC$ и обратно. Према томе ако растојање $e$ учествује у $\triangle ABC$ са знаком „+“, тада у $\triangle ADC$ учествује са знаком „−“ и обратно. Ако пак $O$ лежи на $AC$, $e$ је једнако 0 за оба троугла. У свим случајевима добијамо да је допринос растојања $e$ десној страни прве једнакости једнак 0. Слично је са $f$ у другој једнакости. Отуда је

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2R. \quad \blacksquare$$

Посебно је ефектно наредно тврђење које је очигледно уопштење претходног.

**Теорема 7.** *Тетивни $n$-угао ($n \geqslant 3$) разбијен је на $n-2$ троугла повлачењем $n-3$ дијагонале од којих се никоје две не секу унутар $n$-угла. Тада збир полупречника кружница уписаних у добијене троуглове не зависи од избора повучених дијагонала.*

*Доказ.* Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ тетивни $n$-угао и $O$ центар око њега описане кружнице. Нека је даље $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}\}$ скуп од $n-3$ његове дијагонале које немају заједничких унутрашњих тачака и које га деле на $n-2$ троугла. Обележимо са $r_1$, $r_2$, $\ldots$, $r_{n-2}$ полупречнике кружница уписаних у тако добијене троуглове. Обележимо даље са $d_1$, $d_2$, $\ldots$, $d_n$ растојања тачке $O$ од страница $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_nA_1$, редом, и са $e_1$, $e_2$, $\ldots$, $e_{n-3}$ растојања тачке $O$ од дијагонала $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_{n-3}$, редом.

Ако на сваки од добијених троуглова применимо теорему 5, добијамо

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = (n-2)R + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-2}.$$

Заиста, свака страница многоугла учествује у тачно једном троуглу, а свака од дијагонала $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_{n-3}$ у тачно два троугла. Зато се свако од растојања $d_1$, $d_2$, $\ldots$, $d_n$ појављују на левој страни тачно једанпут. Свако од растојања $e_1$, $e_2$, $\ldots$, $e_{n-3}$ појављује се на левој страни тачно два пута и то једанпут са знаком „+“ и други пут са „−“ или је пак једнако 0. Отуда је

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-2} = d_1 + d_2 + \cdots + d_n - (n-2)R = \text{const}. \quad \blacksquare$$