

Маријана Ајзенкол

ОПШТИ И ЕКСПЛИЦИТНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

Час обраде у трећем разреду средње школе, виђен као драмска игра

Место радње: учионица, средње опремљена.

Лица: професор, ученици Аца, Бора, Весна, Горан, Даница, . . . , редар.

I чин (уводни део — око 10 минута)

Ученици седе, причају, Испред њих табла, лепо обрисана. Улази професор; носи дневник. Тишина.

Професор: Добар дан.

Ученици (*углас*): Добар дан.

Професор (*седа за катедру, записује час*): Ко је одсутан?

Редар: Нема одсутних.

Професор (*затвара дневник, одлази до табле*): Данас ћемо учити општи и експлицитни облик једначине праве у равни (*исписује то као наслов на табли*). То су два начина описивања праве у аналитичкој геометрији. Но, пре него што будемо то радили, решићемо следећи задатак: Права одређена тачкама $M(5, 5)$ и $N(1, 3)$ сече осу Ox . Одреди координате пресечне тачке (не познајући једначину праве).

Ученици записују, тихо коментаришу. Јављају се.

Професор: Ацо, изволи.

Аца (*излази на таблу и овако решава задатак*): Како тачке M , N , P припадају једној правој, то је површина троугла MNP једнака нули. Дакле,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$x \cdot (5 - 3) + 1 \cdot (15 - 5) = 0, \quad 2x = -10,$$
$$x = -5, \quad S(-5, 0).$$

Професор: Лепо.

Аца одлази на своје место. Крај I чина.

II чин (главни део часа — око 30 минута)

Професор: А сада да мало попричамо о нашој теми. Нека тачке $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ одређују праву p и нека је $M(x, y)$ произвољна тачка те праве. То значи да су тачке M, P, Q колинеарне, односно да је површина троугла MPQ једнака нули. Зато ће бити

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле

$$(*) \quad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 1 \cdot (x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0.$$

Означимо $A = y_1 - y_2$, $B = x_2 - x_1$, $C = x_1 y_2 - y_1 x_2$, и добијамо једначину облика

$$Ax + By + C = 0.$$

Обрнуто, ако координате тачке $M(x, y)$ задовољавају једначину $(*)$, онда је површина троугла MPQ једнака нули и тачке M, P, Q су колинеарне, што значи да M тада припада правој коју одређују тачке P и Q . Дакле, једначина $(*)$ је-сте једначина праве $p(P, Q)$. Облик $Ax + By + C = 0$ назива се општим обликом једначине праве. Урадићемо сада један пример:

Дате су тачке $A(2, -3)$, $B(1, 0)$. Написати једначину праве $a(A, B)$.

Више ученика се јавља.

Професор: Боро, хоћеш ли ти?

Бора (*креће према табли и од две креде бира већу, исказујући своје самопоуздање; пише*):

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABM} &= 0, \quad M \in a(A, B), \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0, \quad \begin{aligned} -3x + y + 3 - 2y &= 0, \\ 3x + y - 3 &= 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Ово последње је општи облик једначине праве a (*говори*).

Професор: Фино. Хвала Боро.

Бора одлази на место очигледно задовољан.

Професор: Да се мало замислимо. Који су могући положаји праве у односу на координатне осе? Видећемо како се то одражава на њену једначину.

Весна најбрже реагује; диже руку.

Професор: Изволи Весна.

Весна: Права може бити (*пише*):

1. паралелна оси Ox ;
2. паралелна оси Oy ;
3. у општем положају када није паралелна ниједној од координатних оса.

Професор: Дабоме. Хајде да то овако запишемо (*пише на табли*):

1. права је паралелна оси Ox , па је тада $y_1 = y_2$ а једначина (*) гласи

$$(x_2 - x_1)y + x_1y_1 - x_2y_1 = 0,$$

тј.

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Како је $x_1 \neq x_2$ (иначе би се тачке поклопиле и права не би била одређена), ова је једначина еквивалентна са

$$y = y_1,$$

што представља једначину такве праве;

2. права је паралелна оси Oy , биће $x_1 = x_2$, па једначина (*) гласи

$$(y_1 - y_2)x + x_1y_2 - x_1y_1 = 0,$$

тј.

$$(y_1 - y_2)(x - x_1) = 0,$$

и, због $y_1 \neq y_2$, на исти начин коначно добијамо да је

$$x = x_1$$

једначина такве праве;

3. права није паралелна ни оси Ox ни оси Oy ; тада је $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, па након дељења једначине (*) са $x_2 - x_1$ налазимо њој еквивалентну једначину

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1},$$

односно, уз ознаке $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $n = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$,

$$y = kx + n$$

(табла је потпуно исписана).

Редар: Могу ли да обришем таблу?

Професор: Можеш, ако сте сви преписали.

Ученици (углас): Јесмо.

Редар брише таблу и враћа се на место.

Професор: Да наставимо (црта слику):

Ако је права $p(P, Q)$ у положају као на првој слици, видимо да је угао φ , који она заклапа са осом Ox , $\varphi = \angle QPS$, па је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|QS|}{|PS|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ако је права p у положају као на следећој слици, онда је

$$\begin{aligned} \pi - \varphi &= \angle QPS, \quad \operatorname{tg}(\angle QPS) = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}, \\ -\operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \quad \left(= \frac{|QS|}{|PS|} \right), \end{aligned}$$

па је опет

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Лако је уочити да су са ова два положаја обухваћени сви могући положаји праве p која није паралелна некој од координатних оса. При томе треба нагласити да се праве $p(P, Q)$ и $p'(Q, P)$ поклапају, па тачке P и Q могу мењати места на сликама.

Видимо да број k из једначине $y = kx + n$ представља тангенс угла који права заклапа са осом Ox . Називамо га коефицијентом правца праве $p(P, Q)$.

Ако је $x = 0$, онда је $y = n$, па n представља ординату тачке N у којој права сече осу Oy (*црта слику*).

Ако је права паралелна оси Oy , њена је једначина $x = p$, где је p реалан број. Видели смо да је то број x_1 , апсциса било које тачке те праве.

Ако је права паралелна оси Ox , њена је једначина $y = n$, где је n ордината било које тачке те праве.

Наведена три облика једначине:

$$y = kx + n, \quad x = p, \quad y = n,$$

називају се експлицитним облицима једначине праве. При томе уочавамо да је трећи од њих специјални случај првог, при $k = 0$.

Бора: Професоре, како једна права има две различите једначине? Постоји ли нека веза између општег и експлицитног облика једначине праве?

Професор: Питање је заиста уместо. Показаћемо сада како се прелази са једног на други облик једначине праве.

Ако је једначина праве дата у експлицитном облику

$$y = kx + n \quad \text{или} \quad x = p,$$

општи облик њене једначине је

$$kx - y + n = 0 \quad \text{односно} \quad x - p = 0,$$

где је

$$A = k, B = -1, C = n \quad \text{односно} \quad A = 1, B = 0, C = -p.$$

Напоменимо да је општи облик једначине ове праве и свака једначина облика

$$\lambda kx - \lambda y + \lambda n = 0 \quad \text{односно} \quad \lambda x - \lambda p = 0$$

где је λ произвољан реалан број различит од нуле.

Ако је једначина праве дата у општем облику

$$Ax + By + C = 0$$

разликоваћемо два случаја:

1. $B = 0$ — тада не може бити и $A = 0$, јер $C = 0$ не описује праву, па је једначина $Ax + C = 0$, $A \neq 0$, еквивалентна са

$$x = -\frac{C}{A},$$

што представља експлицитни облик једначине те праве, уз $p = -\frac{C}{A}$.

2. $B \neq 0$ — тада је једначина еквивалентна са

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

што представља експлицитни облик једначине те праве, уз $k = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$.

Урадићемо сада један пример (*диктира*):

Одредити тачке пресека праве $2x - 3y - 12 = 0$ са координатним осама.

Написати једначину те праве у експлицитном облику.

Ученици се јављају.

Професор: Горане, изволи.

Горан (*излази на таблу и решава задатак овако*):

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y - 12 = 0 & 2x - 3y - 12 = 0 \\ x = 0 & y = 0 \\ -3y = 12 & 2x = 12 \\ x = 0 & y = 0 \\ y = -4 & x = 6 \\ x = 0 & y = 0 \\ M(0, -4) & N(6, 0) \end{array}$$

(црта слику)

(пише)

Експлицитни облик једначине ове праве:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y - 12 = 0 \\ -3y = -2x + 12 \quad : (-3) \\ y = \frac{2}{3}x - 4. \end{array}$$

Професор: Добро је. Хвала. Запишите следећа два задатка за домаћи (диктира):

1. Наћи координате тачака које припадају правој $7x + 2y - 8 = 0$ и апсцисе су им: а) 2; б) -4 ; в) $\frac{1}{2}$.

2. Доказати да права која садржи тачке $P(5, 0)$ и $Q(0, -2)$, такође садржи и тачке $R(15, 4)$, $S(-5, -4)$.

Урадићемо сада још један задатак (диктира):

Дате су тачке $A(1, -2)$ и $B(2, 3)$. Одредити тачку C , која припада правој $2x + y - 2 = 0$, такву да је површина троугла ABC једнака 8.

Ученици размишљају. Даница се прва јавља.

Професор: Данице, изволи.

Даница (излази на таблу и пише):

$$C(x_1, y_1), \quad P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} 3 - 2x_1 + 2y_1 - 3x_1 + 4 - y_1 &= 16 \\ -5x_1 + y_1 + 7 &= 16 \\ -5x_1 + y_1 &= 9 \end{aligned}$$

$$C \in p: \quad 2x_1 + y_1 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1 &= 2 & 2x_1 + y_1 &= 2 & x_1 &= -1 \\ -5x_1 + y_1 &= 9, & 7x_1 &= -7, & y_1 &= 4, \end{aligned} \quad C(-1, 4).$$

Професор: Заиста си то добро урадила.

Даница одлази на место. Крај II чина.

III чин (завршни део часа — око 5 минута)

Професор (иде до табле и пише):

$$y = k_1x + n_1, \quad y = k_2x + n_2.$$

(Пита): Кад су ове две праве паралелне?

Чује се глас: Кад је $k_1 = k_2$.

Професор: Добро, а кад су праве

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

паралелне?

Након неколико тренутака чује се: Кад је $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$.

Професор: Можемо ли то једноставније исказати? Размислите о томе. И водите рачуна да B_1 или B_2 могу бити једнаки нули. (Чује се звоно). О овоме ћемо разговарати следећег часа. Довиђења.

Ученици (углас): Довиђења.

Крај

Дешавања и брз темпо могу донекле заморити одељење. Али такав замор је бољи од оног другог, од кога се одељење успава. Отуда и наша склоност ка виђењу и уобличавању часа као драмске игре.