

Боривоје Јаношевић

ПРИМЕНА ПРОПОРЦИЈЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Са посебним освртом на проблем мешања

У програму математике у основној школи значајно место припада проблему пропорције и њеној примени у конкретним, у свакодневном животу блиским ситуацијама и проблемима. У домену примене пропорција заузима значајно место и у предметима хемија и физика. С аспекта корелације наставе наведених предмета питање целовитијег приступа у третирању пропорције добија на значају, и то како у погледу садржаја који се обрађују тако и у погледу распоређивања у наставним плановима, односно прилагођавања обраде пропорције у оквиру математике са применом у хемији и физици.

Питања пропорције обрађују се у основној школи у оквиру следећих подцелина (које су органски повезане и чине целину): А) Сразмерни рачун; Б) Рачун поделе; В) Рачун мешања; Г) Процентни рачун; Д) Промилни рачун.

У циљу јаснијег сагледавања проблема смеше, корисно је дати неколико напомена о појединим подцелинама (обрадићемо овде прве три).

А – Сразмерни рачун

У програму математике за основну школу обрађују се примери тзв. простог сразмерног рачуна — у коме учествује само један пар сразмерних величина (директно или обрнуто сразмерних). То су задаци типа

А.1. За 4 m платна плаћено је 1 600 000 динара. Колико треба платити за 7 m истог платна?

Задатак радимо помоћу следеће шеме (јасно је да се ради о управно сразмерним величинама, што у шеми наглашавамо стрелицама истог смера), из које затим формирамо пропорцију.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow 4 \text{ m} & 1\,600\,000 & \downarrow \\ & x & \\ \downarrow 7 \text{ m} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} x : 1\,600\,000 = 7 : 4 \\ 4x = 11\,200\,000 \\ x = 2\,800\,000 \text{ дин.} \end{array}$$

Слично се решавају и задаци овог типа у којима су присутне обрнуто пропорционалне величине, што се у шеми наглашава супротним смером стрелица.

Б – Рачун поделе

Примењујемо га у ситуацијама када неки износ делимо на више делова који чине пропорцију или се могу свести на пропорцију. Најједноставнији пример овог типа имао би облик:

Б.1. Комад легуре од 45 kg садржи бакра (Cu) и калаја (Sn) у размери 7 : 2. Колико је килограма бакра, а колико калаја у тој легури?

У задацима овог типа јавља се више променљивих што у 7. разреду није решиво без увођења коефицијента пропорционалности, чиме проблем сводимо на једну променљиву.

Дакле,

$$\begin{array}{rcl} \text{Cu} & = & 7k \\ \text{Sn} & = & 2k \\ \text{Cu} + \text{Sn} & = & 45 \\ 7k + 2k & = & 45 \\ k & = & 5 \end{array}$$

Одатле имамо: бакра има $7 \cdot 5 = 35$ kg, калаја је $2 \cdot 5 = 10$ kg.

В – Рачун мешања

Нешто сложенији је проблем познатији као рачун мешања. Да би се решио проблем састављања неке смеше, раствора или легуре могу се користити једначине, што може довести до система са великим бројем променљивих, односно једначина, што и у средњој школи ствара проблеме, док би у основној био практично нерешив проблем, изузев неких једноставнијих задатака који се могу решити у 8. разреду.

Како се у пракси често сусрећемо са проблемима мешања, а у настави конкретно и у предметима физика и хемија, корисно је овом питању обратити посебну пажњу. Истина, у настави математике често свесно идемо на сложеније путеве израчунавања, јер нам циљ и није само резултат, већ увежбавање поступка постављања и решавања једначина. Дакле, практичну употребну вредност ови „скраћени“ системи решавања имају управо у настави физике и хемије.

Поменуће потешкоће релативно лако се превазилазе коришћењем пропорције и одговарајућих шема, и то без обзира на број помешаних супстанци.

Размотрићемо најпре један једноставан, уопштен проблем.

В.1. Треба помешати две врсте робе, чије су цене a дин. по kg и b дин. по kg (уз $a > b$), да би се добила роба по цени од c дин/kg (јасно, $b < c < a$). Одредити у којој размери треба мешати ове две врсте робе.

Уобичајеним путем до решења долазимо на следећи начин.

Треба узети x kg прве и y kg друге робе и добићемо $(x + y)$ kg мешавине. Отуда добијамо једнакост

$$ax + by = c(x + y).$$

Одавде је $ax - cx = cy - by$, односно $x(a - c) = y(c - b)$ и коначно

$$x : y = (c - b) : (a - c).$$

Формирали смо пропорцију која је тражена.

До истог резултата, уместо постављања једначине, можемо доћи уз помоћ следеће шеме:

$$\begin{array}{ccccc} x \text{ kg} & a & c - b & & \\ & c & & x : y = (c - b) : (a - c). & \\ y \text{ kg} & b & a - c & & \end{array}$$

Увођењем конкретних вредности добија се врло једноставно решење, а ако се захтева и одређена количина добијене смеше, задатак путем приказаног решења (добијене пропорције) сводимо на прост рачун поделе. Такав би био пример:

В.2. Колику количину воде температуре 30°C и воде температуре 60°C треба помешати да би де добило 45 l воде температуре 50°C ?

$$\begin{array}{rclcl} x \text{ l} & 30^{\circ}\text{C} & & 10 & \\ & & 50^{\circ}\text{C} & & x : y = 10 : 20, \\ y \text{ l} & 60^{\circ}\text{C} & & 20 & \end{array}$$

односно, скраћивањем, $x : y = 1 : 2$ (број 10 добијен је као разлика $60 - 50$, а број 20 као разлика $50 - 30$).

Да је тражена само размера у којој треба вршити мешање, задатак би био завршен.

У даљем току задатак је могуће решавати на два начина — увођењем коефицијента пропорционалности (рачун поделе) на шта смо и принуђени у седмом разреду основне школе, или формирањем система линеарних једначина са две непознате, што пуну примену налази у осмом разреду, где, као што је већ поминуто, акценат и није на резултату самом по себи, већ и на одређеном поступку решавања.

Дакле,

помоћу система линеарних

једначина са 2 непознате:

$$\begin{aligned} x : y &= 1 : 2 \\ x + y &= 45 \\ 2x &= y \\ x + y &= 45 \\ x + 2x &= 45 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \text{ l}, \quad y = 30 \text{ l} \end{aligned}$$

рачуном поделе:

$$\begin{aligned} x : y &= 1 : 2 \\ x + y &= 45 \\ x &= k \quad y = 2k \\ k + 2k &= 45 \\ 3k &= 45 \\ k &= 15 \\ x &= 15 \text{ l}, \quad y = 30 \text{ l} \end{aligned}$$

Уколико имамо три или више „учесника у игри“, проблем по правилу постаје неодређен и има бесконачно много решења. У задатку се може захтевати (то ћемо даље подразумевати) само да се нађе бар једно решење. Ево једног таквог примера.

В.3. У којој размери треба помешати растворе алкохола јачине 65%, 50% и 30% да би се добио раствор са 45% алкохола?

$$\begin{array}{rclcl} x & 65\% & & 15 & | & 15 \\ y & 50\% & 45\% & 15 & | & 15 \\ z & 30\% & & 20 & 5 & | & 25 \end{array}$$

И овде су бројеви 15, 15 и 5, односно 20 добијени као разлика између тражене и датих вредности концентрације (или обрнуто, зависно која је вредност већа).

При том за z (тј. алкохол чија је концентрација једина мања од тражене) одређујемо два коефицијента — 5 и 20, које затим сабирамо и добијамо коефицијент са којим z учествује у процесу мешања. Дакле, имамо продужену пропорцију

$$x : y : z = 15 : 15 : 25,$$

односно скраћивањем, $x : y : z = 3 : 3 : 5$.

С обзиром да количина траженог раствора није одређена, овим је задатак завршен. Уколико би стајао и тај захтев, лако бисмо га решили уз помоћ рачуна поделе:

$$x = 3k, \quad y = 3k, \quad z = 5k.$$

Погледајмо како би изгледао проблем са четири променљиве величине.

В.4. Треба претопити 4 врсте легуре бакра. Једна садржи 80% бакра, друга 70%, трећа 45% и четврта 40%. У којој размери треба узети поједине врсте да би се добила легура са 50% бакра?

Размотримо следеће две комбинације мешања:

a	80%	10	2	a	80%	5	1
b	70%	5	1	b	70%	10	2
	50%				50%		
c	45%	20	4	c	45%	30	6
d	40%	30	6	d	40%	20	4

Даљи поступак је исти као у претходним примерима. Уочавамо да се добијају различити односи. У првом случају имамо

$$a : b : c : d = 2 : 1 : 4 : 6,$$

а у другом

$$a : b : c : d = 1 : 2 : 6 : 4.$$

На сличан начин решава се и задатак типа

В.5. Златар меша 100 g сребра финоће 600‰ и 500 g сребра финоће 850‰. Које финоће ће бити мешавина?

Поставимо шему сличну претходним:

$$\begin{array}{ccc} 100 \text{ g} & 600\text{‰} & 850 - x \\ & x & \\ 500 \text{ g} & 850\text{‰} & x - 600 \end{array}$$

Формирамо пропорцију

$$100 : 500 := (850 - x) : (x - 600),$$

из које једноставним рачуном добијамо тражени податак 808,33‰.

У наставку наводимо два задатка из свакодневне праксе који се могу решити на описани начин.

1. Млинско предузеће има две врсте брашна: једно по цени од 72 000 дин/kg и друго по 48 000 дин/kg. Колико треба узети од сваке врсте да би се добило 1200 kg мешавине, чија би цена била 64 000 дин/kg?

2. У ком односу треба да се помешају три врсте пиринча, цена 280 000, 350 000 и 300 000 дин/kg да би мешавина имала цену 320 000 дин/kg?