

Драгољуб Јовић

**ИРАЦИОНАЛНОСТ НЕКИХ ВРЕДНОСТИ
ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА**

У настави математике се релативно мало пажње посвећује ирационалним бројевима. Осим дефиниције ирационалног броја и већ традиционалног доказа да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, о тим бројевима се готово више и не говори. Овај чланак је написан са намером да се о ирационалности неких вредности тригонометријских функција каже нешто више, тим пре што је ирационалност многих бројева тек у новије време доказана.

Следећим теоремама доказаћемо да су, уз неке изузетке, вредности тригонометријских функција углова, који имају рационалан број степена, ирационалне.

ТЕОРЕМА 1. *Ако је α мера неког оштрог угла у степенима, таква да је $\alpha \neq 45^\circ$ и $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 180^\circ$, при чему $m, n \in \mathbf{N}$, тада је број $\operatorname{tg} \alpha$ ирационалан.*

Доказ. Да бисмо доказали да је број $\operatorname{tg} \alpha$ ирационалан, поступићемо индиректно, тј. претпоставићемо да је он рационалан. Ако је тако, онда у скупу $\mathbf{N}$ природних бројева постоје бројеви p и q , такви да је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$, $D(p, q) = 1$ и $p \neq q$ (због претпоставке $\alpha \neq 45^\circ$).

С друге стране, према претпоставци теореме је $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 180^\circ$, при чему можемо претпоставити да је $D(m, n) = 1$ и (због тога што је α оштар угао) $m \neq n$. Зато је $n\alpha = m \cdot 180^\circ$, одакле, пак, непосредно произлази да је

$$(1) \quad \sin(n\alpha) = \sin(m \cdot 180^\circ) = 0.$$

Напишимо сада Мојвге-ову формулу за n -ти степен комплексних бројева $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$. Тако имамо да је:

$$(2) \quad \begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha), \\ (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n &= \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha). \end{aligned}$$

Како је, према (1), $\sin(n\alpha) = 0$, то из релација (2) следи да је

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n,$$

одакле, пак, после дељења са $\cos^n \alpha > 0$, произлази да је

$$(3) \quad (1 + i \operatorname{tg} \alpha)^n = (1 - \operatorname{tg} \alpha)^n.$$

Ако вредност $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$ уврстимо у једнакост (3), она постаје

$$\left(1 + i \cdot \frac{p}{q}\right)^n = \left(1 - i \cdot \frac{p}{q}\right)^n,$$

одакле даље редом добијамо:

$$\begin{aligned}
 (q + ip)^n &= (q - ip)^n, \\
 [(q - ip) + 2ip]^n &= (q - ip)^n, \\
 (q - ip)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (q - ip)^{n-k} (2ip)^k &= (q - ip)^n, \\
 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (q - ip)^{n-k} (2ip)^{k-1} &= 0, \\
 (4) \quad (q - ip) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (q - ip)^{n-k-1} (2ip)^{k-1} &= -(2ip)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Упоредивши модуле комплексних бројева на левој и десној страни релације (4), добијамо

$$(5) \quad (p^2 + q^2)M^2 = (2p)^{2n-2},$$

где смо са M означили модул комплексног броја $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (q - ip)^{n-k-1} (2ip)^{k-1}$.

Очито је M^2 природан број, па зато из (5) произлази да број $(2p)^{2n-2}$ мора бити дељив са $p^2 + q^2$. С друге стране, из $D(p, q) = 1$ следи да је и $D(p, p^2 + q^2) = 1$, па из претходног следи да број 2^{2n-2} мора бити дељив са $p^2 + q^2$. Покажимо да то није могуће.

Како су бројеви p и q узајамно прости, то постоје две могућности: бројеви p и q су различите парности или су оба непарна. У првом случају је $p^2 + q^2$ непаран број, па не може бити делилац броја 2^{2n-2} . Претпоставимо зато да су p и q непарни бројеви, $p = 2a + 1$ и $q = 2b + 1$, $a, b \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Тада је

$$p^2 + q^2 = 2(2a^2 + 2b^2 + 2a + 2b + 1).$$

Одавде произлази да $p^2 + q^2$ садржи непаран фактор $2a^2 + 2b^2 + 2a + 2b + 1$. Овај фактор је различит од 1, јер би у противном било $a = b = 0$, тј. $p = q = 1$, што је искључено претпоставком. Зато ни у овом случају не може да важи $p^2 + q^2 \mid 2^{2n-2}$.

Дакле, полазећи од претпоставке да је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$, $D(p, q) = 1$ и $p \neq q$, дошли смо до контрадикције. Тиме је теорема у потпуности доказана. ■

ТЕОРЕМА 2. *Ако је α мера неког оштрог угла у степенима, таква да је $\alpha \neq 45^\circ$ и $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 180^\circ$, $m, n \in \mathbf{N}$, онда је број $\operatorname{ctg} \alpha$ ирационалан.*

Доказ. Услови ове теореме су исти као у теорему 1, па је зато број $\operatorname{tg} \alpha$ ирационалан. Отуда произлази да је и број $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, као реципрочна вредност ирационалног броја, такође ирационалан. ■

Сличним поступком може се доказати и следећа теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Ако је α мера неког оштрог угла у степенима, таква да је $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 180^\circ$, $m, n \in \mathbf{N}$, онда су бројеви $\cos \alpha$ (осим за $\alpha = 60^\circ$) и $\sin \alpha$ (осим за $\alpha = 30^\circ$) ирационални.*