

Др Милосав Марјановић

LAGRANGE-ОВА ФОРМУЛА
ЗА ВЕКТОРСКО ВРЕДНОСНЕ ФУНКЦИЈЕ

За непрекидно пресликавање $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, које је диференцијабилно на (a, b) , постоји $\xi \in (a, b)$ такво да

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(\xi)\|.$$

Ова релација, која је аналогон Lagrange-ове формуле, не своди се, у општем случају, на једнакост ни кад је $n = 2$. На пример, нека је

$$f(x) = (\cos x, \sin x), \quad \text{односно} \quad \begin{cases} u_1 = \cos x \\ u_2 = \sin x, \end{cases}$$

тада је, за $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(b) - f(a) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0)$, док је за свако $x \in (a, b)$,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \|f'(x)\| = 1.$$

(Видети стр. 112–113, књиге [1].)

У случају пресликавања $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$, кад је U отворени и конвексни подскуп од $\mathbf{R}^n$, за диференцијабилно f и константу K такву да је: $(\forall i)(\forall j) |\partial f_i / \partial x_j| \leq K$, неједнакост

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (mn)^{1/2} K \|b - a\|$$

такође игра улогу Lagrange-ове формуле.

Аутор овог чланка, користећи рукопис који му је служио за припрему предавања из анализе, налази да је корисно имати варијанту Lagrange-ове формуле у случају пресликавања $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ у виду једнакости (са низом средњих вредности $\xi_1, \dots, \xi_m$), а ефекат те варијанте везаће за доказ теореме о инверзној функцији, у току кога ће та једнакост бити коришћена у два суптилна случаја. Ради целовитости, изнећемо и све друге детаље, који су, углавном, преузети из књига [1] и [2].

1. Операторна норма. Са $\mathbf{R}^n$ означаваћемо Еуклидски простор n -торки реалних бројева. Скуп свих линеарних пресликавања простора $\mathbf{R}^n$ у простор $\mathbf{R}^m$ означаваћемо са $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Са операцијама сабирања и множења скаларом, $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ је линеарни простор.

Променљиве, пресликавања и њихове вредности у тачки, изражаваћемо скаларно држећи се следећих придруживања:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A(x) \mapsto A \cdot x,$$

$$y = A(x) \mapsto \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Простор $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ нормира се на следећа два стандардна начина.

За $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, број

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \mid \|x\| = 1\}$$

називамо *операторна норма* пресликавања (или оператора) A .

Стандардност ове норме веже се за следеће неједнакости

$$1.1. (\forall x) \|A(x)\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

(где је $\|A\|$ најбоља константа за ту неједнакост).

1.2. *Кад је A инвертибилно пресликавање, тада*

$$(\forall x) \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|A(x)\|.$$

С друге стране, матрицу A можемо идентификовати са вектором

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{mn},$$

па на тај начин уводимо у $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *Еуклидску норму*

$$\|A\|_E = \left\{ \sum a_{ij}^2 \right\}^{1/2}.$$

Две норме су тополошки еквивалентне, што следи из неједнакости

$$1.3. \frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_E \leq \|A\| \leq \|A\|_E \leq \sqrt{m} \|A\|.$$

У случају $m = n$ пресликавање $A \mapsto \det(A)$ је непрекидно као полиномиална функција од променљивих a_{ij} . Даље, знамо да је пресликавање A инвертибилно ако и само ако је $\det(A) \neq 0$. Као последица поменутих непрекидности, следи

1.4. *Скуп $\mathcal{I}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ инвертибилних пресликавања у $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ је отворен.*

Из формуле за инверзну матрицу $A^{-1} = \left(\frac{A_{ji}}{\Delta} \right)$, и опет сведећи непрекидност пресликавања у $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ на непрекидност по координатама $(a_{11}, \dots, a_{nn}) \mapsto A_{ji}/\Delta$, одмах следи тврђење

1.5. *За $A \in \mathcal{I}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, пресликавање*

$$A \mapsto A^{-1}$$

је непрекидно.

2. Диференцијабилност. Подсетимо се да за пресликавање $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$, где је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$, кажемо да је *диференцијабилно* у тачки $x \in U$, ако постоји линеарно пресликавање $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ такво да

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - A(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Тада пишемо $f'(x) = A$ и ово линеарно пресликавање називамо *извод функције* f у тачки x .

2.1. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ а $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ дато пресликавање. Тада, f је диференцијабилно у $x \in U \implies$ постоје сви парцијални изводи $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, а извод $f'(x)$ представља се матрицом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

(коју зовемо Јасоби-јева матрица пресликавања f).

2.2. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ и V (отворен) $\subset \mathbf{R}^m$.

(а) За диференцијабилна пресликавања

$$f_1, f_2: U \rightarrow \mathbf{R}^m$$

важи

$$(f_1 + f_2)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

(б) За диференцијабилна пресликавања у дијаграму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & & \downarrow g \\ & & \mathbf{R}^k \end{array}$$

важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Функција $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ је *непрекидно диференцијабилна* кад је то кореспонденција $x \mapsto f'(x)$, односно изражавајући то по координатама, кад су сви парцијални изводи $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ непрекидни.

Наведимо и следеће једноставно тврђење

2.3. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ диференцијабилна функција. Тада,

$$f \text{ има екстремум у } x \in U \implies (\forall j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0.$$

3. Lagrange-ова формула. Приметимо да је, према 1.3, за $m = 1$ операторна норма једнака Еуклидској. У овом истом случају (тј. за реалне функције више променљивих) Lagrange-ова формула се јавља у виду једнакости.

3.1. (*Lagrange-ова формула*). Нека је U (отворен и конвексан) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ диференцијабилно пресликавање. Тада, постоји $\xi \in (0, 1)$ тако да

$$f(x+h) - f(x) = [f'(x+\xi h)](h).$$

Доказ. Функцију

$$\varphi(t) = f(x+th) - f(x), \quad (\varphi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbf{R})$$

(где су x , h и $f(x)$ константе) можемо видети као сложену на следећи начин

$$t \longrightarrow x+th = u$$

$$\downarrow$$

$$f(u) - f(x)$$

Примењујући тврђење 2.2, имаћемо

$$\varphi'(t) = f'(u) \circ h, \quad (h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ је линеарно пресликавање}).$$

Одатле

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x+h) - f(x) = \varphi'(\xi) = f'(x+\xi h) \circ h = [f'(x+\xi h)](h).$$

3.2. Нека је U (отворен и конвексан) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ диференцијабилно пресликавање. Тада,

$$(\forall j) \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq K \implies |f(x+h) - f(x)| \leq K\sqrt{n}\|h\|.$$

Доказ. Примењујући 3.2, 1.1 и 1.3, имамо

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f'(x+\xi h)(h)| \leq \|f'(x+\xi h)\| \cdot \|h\| \\ &\leq \left(\sum \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\xi h) \right]^2 \right)^{1/2} \cdot \|h\| \leq K \cdot \sqrt{n} \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

Следеће тврђење је Lagrange-ова формула за векторсковердносно функције и следи из 3.1, применом на координатне функције.

3.3. Нека је U (отворен и конвексан) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ диференцијабилно пресликавање. Тада, постоје $\xi_1, \dots, \xi_m$ из $(0, 1)$, тако да

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x+\xi_1 h) \\ \dots \\ f'_m(x+\xi_m h) \end{pmatrix} (h).$$

Доказ.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x+h) - f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x+h) - f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1(x + \xi_1 h)(h) \\ \dots \\ f'_m(x + \xi_m h)(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'_1(x + \xi_1 h) \\ \dots \\ f'_m(x + \xi_m h) \end{pmatrix} (h). \end{aligned}$$

3.4. Нека је U (отворен и конвексан) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ диференцијабилно пресликавање. Тада,

$$(\forall i)(\forall j) \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq K \implies \|f(x+h) - f(x)\| \leq K \cdot \sqrt{mn} \cdot \|h\|.$$

Доказ. Сличан са оним у тврђењу 3.2.

Пошто је кореспонденција $A = (a_{ij}) \mapsto \det A$ непрекидна, то кад је $\det A \neq 0$, према 1.4 постоји $\varepsilon > 0$, тако да за сваку матрицу $B = (b_{ij})$, важи импликација

$$(\forall i)(\forall j) b_{ij} \in (a_{ij} - \varepsilon, a_{ij} + \varepsilon) \implies \det B \neq 0.$$

Дакле, тада матрица A има кубну ε -околину $\prod (a_{ij} - \varepsilon, a_{ij} + \varepsilon)$ у $\mathbf{R}^{n^2}$ и све матрице B садржане у тој околини су инвертибилне.

Матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x + \xi_1 h) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x + \xi_1 h) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x + \xi_n h) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x + \xi_n h) \end{pmatrix}$$

означаваћемо краће са $A(x, \xi, h)$, где је $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и свако $\xi_i \in (0, 1)$. Са овим ознакама и претходним напоменама, формулишемо и доказујемо следеће тврђење.

3.5. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ и пресликавање $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ непрекидно диференцијабилно. Тада,

$$\det f'(x_0) \neq 0 \implies$$

$$[(\exists \eta > 0)(\forall x)(\forall h)(\forall \xi) x \in B(x_0, \eta) \text{ и } x + h \in B(x_0, \eta) \implies \det A(x, \xi, h) \neq 0].$$

Доказ. Матрица $f'(x_0)$ има кубну ε -околину, коју чине матрице са детерминантом различитом од нуле. Функције $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ су непрекидне, па постоји $\eta > 0$, тако да

$$\|x_0 - y\| < \eta \implies (\forall i)(\forall j) \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right| < \varepsilon.$$

За $x \in B(x_0, \eta)$, $x + h \in B(x_0, \eta)$, биће за свако $\xi_i \in (0, 1)$, $x + \xi_i h \in B(x_0, \eta)$, тј. $\|x_0 - (x + \xi_i h)\| < \eta$. Тада,

$$(\forall i)(\forall j) \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \xi_i h) \right| < \varepsilon,$$

па је $\det A(x, \xi, h) \neq 0$.

4. Теорема о инверзној функцији. Према овој теорему, непрекидно диференцијабилна функција f , кад је $\det f'(x_0) \neq 0$, инвертибилна је над неком околином тачке x_0 , тј. и тачка $f(x_0)$ има околину тако да кад се f схвати као пресликавање тих околина, биће 1-1 и на и инверзно пресликавање f^{-1} (гледано као пресликавање тих околина) је такође непрекидно диференцијабилно. Издвојимо прво два тврђења која се, иначе, могу извести из сваког доказа теореме о инверзној функцији, али која имају и самостално значење.

4.1. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ и пресликавање $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ непрекидно диференцијабилно. Тада,

$f'(x)$ инвертибилно $\implies$ постоји околина U_x , тачке x , таква да је рестрикција $f|_{U_x}$ „1-1“ пресликавање.

Доказ. За U_x узмемо лопту $B(x, \eta)$ из тврђења 3.5. За $x' \in B(x, \eta)$, $y = x' + h \in B(x, \eta)$, према 3.3 и 1.2, имамо

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x')\| &= \|f(x' + h) - f(x')\| = \|A(x', \xi, h)(h)\| \\ &\geq \frac{\|h\|}{\|(A(x', \xi, h))^{-1}\|} > 0, \end{aligned}$$

па је $f(x') \neq f(y)$.

4.2. Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$, пресликавање $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ непрекидно диференцијабилно и: $(\forall x \in U) f'(x)$ инвертибилно. Тада је $f[U]$ отворени скуп.

Доказ. Нека је $b \in f[U]$ произвољно бирана тачка. Постоји $a \in U$, тако да $f(a) = b$. Нека је $B(a, \eta)$ кугла над којом је $\det f' \neq 0$ и f је 1-1 (4.1). За $\delta \in (0, \eta)$, пошто је f 1-1, $f(a) \notin f[S(a, \delta)]$, где је $S(a, \delta) = \{x \mid \|a - x\| = \delta\}$. Нека је

$$d = \text{dist}\{b, f[S(a, \delta)]\} > 0.$$

Доказаћемо $B(b, d/2) \subset f[U]$. За произвољни $y_0 \in B(b, d/2)$, функција

$$\varphi(x) = \|y_0 - f(x)\|^2 = \sum (y_i^0 - f_i(x))^2$$

је непрекидно диференцијабилна на U . Она у некој тачки $x_0 \in B(a, \delta)$ има минимум, јер на компактном скупу $\overline{B(a, \delta)}$ узима најмању вредност, с тим што је: $(\forall x \in S(a, \delta)) \varphi(x) \geq (d/2)^2$, док је $\varphi(a) < (d/2)^2$.

Према 2.3,

$$(\forall j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) = - \sum_i 2(y_i^0 - f_i(x_0)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Овај систем је хомоген по $y_i^0 - f_i(x_0)$, па му је детерминанта (после скраћивања са 2) $\det f'(x_0) \neq 0$. Одатле,

$$(\forall i) y_i^0 = f_i(x_0)$$

тј. $f(x_0) = y_0$. Дакле, $y_0 \in f[U]$.

4.3. (Теорема о инверзној функцији) Нека је U (отворен) $\subset \mathbf{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ непрекидно диференцијабилна функција. Ако је за $a \in U$, пресликавање $f'(a)$ инвертибилно и $b = f(a)$, тада

(а) постоје отворени скупови V и W ; $a \in V$, $b \in W$, такви да је ресликација $f: V \rightarrow W$ 1-1 и на пресликавање.

(б) пресликавање $f^{-1}: W \rightarrow V$ је непрекидно диференцијабилно и $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$, ($y = f(x)$).

Доказ. (а) Пошто је $\det f'(a) \neq 0$, постоји околина V тачке a над којом је $\det f' \neq 0$ и, према 4.1, над којом је f 1-1 пресликавање. Према 4.2, скуп $f[V] = W$ је отворен. Функција $f^{-1}: W \rightarrow V$ је непрекидна, јер за A (отворен) $\subset V$, имамо

$$(f^{-1})^{-1}[A] = f[A],$$

што је, опет према 4.2, отворени скуп.

(б) Нека је $y \in W$, $f(x) = y$, $A_x = f'(x)$. Доказаћемо $(f^{-1})'(y) = A_x^{-1}$. Приметимо да из релације $y + k = f(x + h)$, имамо: $h \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$, јер је f 1-1; $h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$, јер су f и f^{-1} непрекидне функције. Сад имамо

$$\begin{aligned} \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - A_x^{-1}(k)\|}{\|k\|} &= \frac{\|h - A_x^{-1}(k)\|}{\|k\|} = \frac{\|A_x^{-1}(A_x(h) - k)\|}{\|k\|} \\ &\leq \|A_x^{-1}\| \frac{\|A_x(h) - k\|}{\|k\|} = \|A_x^{-1}\| \frac{\|A_x(h) - k\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}. \end{aligned}$$

Израз $\|A_x^{-1}\|$ не зависи од k , док $\frac{\|k - A_x(h)\|}{\|h\|}$ тежи нули кад k , односно h , тежи нули (јер је f диференцијабилна). Према 3.3,

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|f(x+h) - f(x)\|} = \frac{\|h\|}{\|A(x, \xi, h)(h)\|},$$

а према 3.5, над неком околином тачке x , $A(x, \xi, h)$ је инвертибилно, па је

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq \frac{\|h\|}{\|h\| \|(A(x, \xi, h))^{-1}\|} \leq \|(A(x, \xi, h))^{-1}\|.$$

Пошто $h \rightarrow 0 \Rightarrow A(x, \xi, h) \rightarrow A_x$, и пошто је пресликавање $A \mapsto A^{-1}$ непрекидно, то $\|A(x, \xi, h)^{-1}\| \rightarrow \|A_x^{-1}\|$. Дакле, $(f^{-1})'(y) = A_x^{-1}$, па је f^{-1} диференцијабилно пресликавање.

Пошто су све кореспонденције

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x \mapsto A_x \mapsto A_x^{-1} = (f^{-1})'(y)$$

непрекидне, f^{-1} је такође непрекидно диференцијабилно пресликавање.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1976.
- [2] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, W.A. Benjamin, Inc, 1965.

$$g \circ f$$