

Др Јудита Цофман

ШЕСТОУГАОНИК ИЛИ КОЦКА? ИСПИТИВАЊЕ ТРОДИМЕНЗИОНАЛНИХ ОБЈЕКТА У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Десетогодишњим ученицима често приређујем следећи једноставан тест: Показујем им слику 1, питајући их шта је на слици. Одговор је, у сто од сто случајева, да је на слици коцка. Нико ми до сада није рекао да би цртеж могао да представља правилни шестоугаоник, подељен на три ромба. Након тога деци показујем слику 2. Око тумачења ове слике мишљења су различита: неки виде три коцке на цртежу, други пак тврде да се ради о четири коцке; четврта коцка се крије испод горње и иза две предње коцке.

Сл. 1

Сл. 2

Горњи експеримент подстиче на размишљање. Деца су интерпретирала цртеже, ослањајући се на своје искуство са објектима у простору. Предшколска деца, играјући се коцкама, лоптом и разним просторним конструкцијама, стичу извесну фамилијарност са трећом димензијом, која се после, нажалост, често губи. Покушавајући да ту појаву кочим, у току протеклих година, радећи са 10-13-годишњим ђацима, с времена на време сам их ангажовала у активностима везаним за испитивање просторних фигура. У овом чланку ћу скицирати неке од ових активности.

1. активност: Конструкција полиедара помоћу конгруентних плочица у облику једнакоугаоног троугла (узраст: 10-11 година)

У настави геометрије у школи, од полиедара се обично прво сусрећу они који су правилни. То се правда уверењем да су деци најближи и најприступачнији симетрични објекти. Наш приступ је другачији. Ученицима је дат на располагање велики број плочица у облику конгруентних једнакоугаоних троуглова, са захтевом да се од њих конструишу полиедри. Експериментишући, ђаци долазе до закључка да је за конструкцију тела, чије су стране троугаоне плочице, потребно најмање 4 плочице; да нема тела састављеног од 5 плочица, постоји тело

Сл. 3

са 6 страна, нема тела са 7, али има тела са 8 троугаоних страна и тако даље, сл. 3.

Упоредјујући добијене моделе није било тешко уочити, као специјалне облике, оне полиедри код којих се у сваком темену сретао исти број страна. Тако су ученици откривали правилни тетраедар, октаедар и икосаедар.

Касније се прешло на конструкцију полиедара, користећи разне правилне многоугаонике као стране. Том приликом су формиран и модели коцке и додекаедра.

2. активност: „Кутија у кутији“ — полидери уписани у полиедри (узраст: задаци 1, 2 — 10–11 година; задатак 3 — 12–13 година)

Пошто су упознали разне врсте полиедара, ђацима је дат низ задатака за решавање са циљем да се упознају зависности између појединих полиедара, као и разлике између неких полиедара и одговарајућих дводимензионалних геометријских фигура. Ево неколико примера.

1. задатак: У дату кутију облика коцке сместити:

- (а) највећи могући тетраедар;
- (б) највећи могући октаедар.

У разреду је увек бивало ђака, који су се досетили решења: Ивице траженог тетраедра су дијагонале коцкиних страна, док су центри коцкиних страна темена траженог октаедра.

Ученицима је било познато следеће: Ако се у једнакостраничном троуглу конструишу средине страница, тада свако теме троугла са срединама оних страница које полазе из тог темена одређује по један „мали“ троугао. Одстранимо од оригиналног троугла сваки од ових малих троуглова (на сл. 4(а) то су шрафирани троуглови); преостали део фигуре је такође једнакостранични троугао.

Постављено је питање: Шта је решење сличног проблема у простору? Другим речима, дат је задатак:

2. задатак: Нека је дат правилни тетраедар $T = ABCD$. Теме A и средине ивица AB , AC и AD су темена тетраедра T_A . Слично томе, темена B , C и D са срединама ивица тетраедра T које полазе из темена B , C , односно D одређују тетраедри T_B , T_C , односно T_D . Одстранимо тетраедри T_A , T_B , T_C и T_D од тетраедра T ; шта представља преостало тело?

Слика 4(б) показује да се, за разлику од одговарајућег планиметријског проблема, после одштајивања тела T_A , T_B , T_C и T_D од T , не добија тело слично оригиналном телу T , већ правилан октаедар.

(а)

(б)

Сл. 4

Следећи задатак открива једну од разлика између квадрата и коцке.

- 3. задатак:** (а) Нека је дат квадрат $ABCD$ са центром O . Конструирајмо тачке A' , B' , C' , D' , симетричне тачки O у односу на странице AB , BC , CD , односно DA и спојимо сваку од тих тачака са оним теменима квадрата $ABCD$, која су тој тачки најближа. На тај начин настаје геометријска фигура, ограничена новоконструисаним дужима. Какве особине има новодобијена геометријска фигура?
- (б) Решити сличан проблем у простору: Нека је дата коцка $ABCDEFGH$ са центром O . Конструирајмо тачке, симетричне тачки O у односу на стране коцке и спојимо сваку од тих тачака са оним теменима коцке, која су тој тачки најближа. На тај начин настаје фигура, чија су темена темена коцке и конструисане тачке симетричне тачки O у односу на стране коцке. Какве особине има добијено тело?

Ученицима није било тешко решити део (а) задатка 3. Троуглови $\triangle AA'B$, $\triangle BB'C$, $\triangle CC'D$ и $\triangle DD'A$ су конгруентни троуглу $\triangle OAB$. Из тога следи да дужи $A'B$, BB' , $B'C$, CC' , $C'D$, DD' , $D'A$ и AA' заједнички чине обим квадрата $A'B'C'D'$, сл. 5(а). Површина квадрата $A'B'C'D'$ је два пута већа од површине квадрата $ABCD$.

Решавање дела (б) задатка 3 било је подељено на неколико етапа:

- (i) Ученици су утврдили да је број тачака симетричних тачки O у односу на стране коцке шест. (На сл. 5(б) од тих тачака нацртане су тачке A' и B' .)
- (ii) Свака од тих шест тачака је спојена са *четири* темена коцке, која су дотичној тачки најближа. На тај начин је добијемо $6 \times 4 = 24$ троугла (на слици су нацртани троуглови ABA' , ADA' , DCA' , CBA' и CBB'). Ови троуглови ограничавају новодобијено тело T .
- (iii) Најтежи део доказа се састојао у томе да се утврди да свака два од 24 горе конструисана троугла, који поседују једну од ивица коцке као заједничку страницу, леже у једној равни и да се, према томе, стапају у један ромб. Ту

(а)

(б)

Сл. 5

се указала прилика за дискусију: Ђацима је скренута пажња на чињеницу да су парови троуглова, на пример CBA' и CBV' у једној равни тада и само тада када права $A'B'$ сече праву CB . Направљен је попречни пресек коцке са равни одређеном тачкама A' , B' и O . Констатовано је да та раван пролази кроз средишту M дужи BC и кроз средишта N и K квадрата $ABCD$ и $BCGF$. При томе је $\angle A'MN' + \angle NMK + \angle MKB' = 180^\circ$; према томе тачке A' , M и B' су колинеарне, тј. праве $A'B'$ и CB се секу у тачки M . Одатле следи да су тачке A' , B , B' и C темења једног равног четвороугла. Пошто су све стране овог четвороугла $A'BV'C$ једнаке, $A'BV'C$ је ромб.

(iv) Пошто коцка има 12 ивица, из горњих расуђивања следи да тело T има 12 страна; те стране су конгруентни ромбови. Тело се назива ромбични додекаедар (*додека* је 12 на грчком).

3. активност: Реконструкција тродимензионалних објеката уз помоћ њихових ортогоналних пројекција (узраст: 12–13 година)

Идеја за ову активност потиче из руског часописа „Квант“. Активност је организована у две етапе. Прва етапа је служила за припрему: Ученицима је дат цртеж коцке $ABCDEFGH$, која садржи парче савијене жице. Задатак се састоји у следећем: (а) Ако се коцка осветли паралелним зрацима „одозго“, тј. у правцу $\overrightarrow{EA}$, нацртати сенку (другим речима, ортогоналну пројекцију) жице на основу $ABCD$. (б) Коцка се осветљава паралелним зрацима „спреда“, тј. у правцу $\overrightarrow{AD}$; треба нацртати сенку жице на страну $DCGH$. Најзад, (в) коцка је осветљена паралелним зрацима „с бока“, у правцу $\overrightarrow{BA}$; нацртати сенку жице на страну $ADHE$. — Пример оваквог задатка са решењем представљен је на слици 6.

Пошто су ученици стекли извесно искуство у конструкцији ортогоналних пројекција у следећој етапи активности прелази се на решавање обрнутог проблема: На основу датих ортогоналних пројекција једне жице у коцки реконструисати облик жице.

Коцка са жицом	Пројекција у правцу $\overrightarrow{EA}$	Пројекција у правцу $\overrightarrow{AD}$	Пројекција у правцу $\overrightarrow{BA}$
----------------	--	--	--

Сл. 6

На основу искустава, стечених у току последњих петнаест година, склона сам мишљењу да горе описани, и њима слични прилази проблемима у простору не представљају нарочите тешкоће ученицима; повољни утицај активности на развој моћи перцепције сам често назирала касније, пратећи рад мојих бивших 10–13-годишњих ученика током њиховог даљег школовања.

Математички Институт
Универзитета у Ерлангену