Мр Шефкет Арсланагић

ВИШЕ РЈЕШЕЊА ЈЕДНОГ ЗАДАТКА О ЕКСТРЕМУМУ

Задаци о екстремумима (максимуму и минимуму) функција су веома интересантни и имају често велику практичну примјену. У средњој школи најчешће се они рјешавају елментарним путем и то, кад имају јасно геометријско значење, прилично једноставно. Но, општи начин њиховог рјешавања је помоћу извода функција. Овдје ћемо дати један примјер задатка о екстремуму из геометрије кога ћемо рјешити на више начина. Рјешења 1. и 2. би се могла урадити са ученицима првог и другог разреда средње школе, а рјешење 3. са ученицима завршног разреда средње школе. Најзад, третирајући исти проблем на више начина, ми тим путем јасније интерпретирамо методе које у ту сврху користимо. У том смислу укључујемо и рјешење 4, за чије разумијевање потребно је имати нешто више знања из математичке анализе. Свакако би добро било да читаоци овог чланка покушају наћи још које рјешење овог задатка. Ријеч је о следећем задатку:

Између свих правоуглих троуглова чији је обим једнак a, одредити (наћи) онај чија је површина највећа.

Рјешење 1.

Користићемо познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја, тј.

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}, \quad x_1,x_2>0. \tag{1}$$

Стављајући у (1) да је $x_1=x^2$, $x_2=y^2$, добијамо $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$, односно

$$\frac{xy}{2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{4}. \tag{2}$$

Пошто је површина правоуглог троугла $P=\dfrac{xy}{2}$, то је због (2):

$$P \leqslant \frac{x^2+y^2}{4}. \tag{3}$$

Важи једнакост у (2), односно у (3) ако је $x=y$. Тада је $P_{\max}=x^2/2$. Пошто је

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=a,$$

то за $x = y$ добијамо $2x + x\sqrt{2} = a$, а одавде

$$x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}),$$

односно $y = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$. Дакле, ријеч је о једнакокрако-правоуглом троуглу чије су катете $\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$, а хипотенуза $a(\sqrt{2}-1)$, а максимална површина износи

$$P_{\max} = \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}).$$

Рјешење 2.

За ово рјешење користићемо тригонометрију. Из правоуглог троугла ABC, имамо: $x = z\sin\alpha$, $y = z\cos\alpha$, тј.

$$P = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}z^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(x^2+y^2)\sin 2\alpha.$$

Пошто је $0 < \sin 2\alpha \leqslant 1$, $0 < \alpha < 90^\circ$, то је:

$$P \leqslant \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Важи једнакост ако је $\sin 2\alpha = 1$, тј. $\alpha = 45^\circ$. Дакле, ријеч је о једнакокрако-правоуглом троуглу јер је $\alpha = \beta = 45^\circ$, тј. $x = y$, $z = x\sqrt{2}$. Даљи поступак је исти као у рјешењу 1.

Рјешење 3.

Овдје ћемо дати рјешење користећи изводе функције са једном промјенљивом.

Имамо $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = a$, тј. $\sqrt{x^2+y^2} = a - x - y$, а одавде након квадрирања и сређивања, добијамо:

$$y = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}.$$

Сада је због $P = \frac{1}{2}xy$:

$$P(x) = \frac{ax(a-2x)}{4(a-x)}.$$

Даље је

$$P'(x) = \frac{4(a^2-4ax)(a-x)+4ax(a-2x)}{16(a-x)^2} = \frac{2ax^2-4a^2x+a^3}{4(a-x)^2}.$$

Имамо да је $P'(x) = 0$ за $2ax^2 - 4a^2x + a^3 = 0$, тј. за

$$x_1 = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) \qquad \left(x_2 = \frac{a}{2}(2+\sqrt{2}) > a \text{ отпада}\right).$$

Сада је

$$P'(x)\begin{cases} >0, & x\in(0,\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}));\ P(x)\nearrow \\ =0, & x=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2});\ (\max) \\ <0, & x\in(\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}),a);\ P(x)\searrow \end{cases}$$

Дакле, имамо да је

$$\max P(x) \quad \text{за } x=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}).$$

Тада је

$$y=\frac{a(a-2x)}{2(a-x)}=\frac{a(a-2a+a\sqrt{2})}{2(a-a+\frac{\sqrt{2}}{2}a)}=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}),$$

те је

$$P_{\max}=\frac{xy}{2}=\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}).$$

Рјешење 4.

Тражићемо везани екстремум функције са двије промјенљиве увођењем Лагранжовог мултипликатора λ, тј. одредићемо максимум функције $P(x,y)=\dfrac{1}{2}xy$ при услову $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=a$.

Формирајмо помоћну функцију

$$F(x,y)=\frac{xy}{2}+\lambda(x+y+\sqrt{x^2+y^2}-a).$$

Имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{2}+\lambda+\frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x}{2}+\lambda+\frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из услова $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ и $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=a$, добијамо:

$$\lambda\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{y}{2} \quad \text{и} \quad \lambda\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{x}{2},$$

односно након дијељења горњих једнакости:

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y},$$

а одавде након сређивања $(x-y)(\sqrt{x^2+y^2}+x+y)=0$, те најзад $x-y=0$, тј. $x=y$.

Из $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = a$ и $x = y$, добијамо

$$x = y = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}); \quad \lambda = \frac{a}{2}(2\sqrt{2} - 3).$$

Пошто је

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,(dy)^2 < 0$$

у тачки $x = y = \dfrac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$, функција F има максимум који износи $\dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$. Дакле, имамо да је

$$P_{\max} = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}).$$

Напомена. Задатак који смо рјешавали подсјећа на други, чешће присутан у збиркама задатака: „Од свих правоугаоника обима $2s$, наћи онај највеће површине". (Рјешење је једноставно:

Странице су x и $s - x$. Тада је $P(x) = x(s - x) \leqslant s^2/4$, са једнакошћу, кад је $x = s - x$. Тада је $x = s/2$, $s - x = s/2$ и тражени правоугаоник је квадрат странице $s/2$.)

Помисао да се претходни задатак директно своди на овај једноставнији је варљива, јер кад правоугаоници имају константан обим, збир страница троуглова на које се дијеле дијагоналом варира. Заиста, правоугаоници смјештени у првом квадранту, са тјеменом у координатном почетку и страницама на осама, кад имају константан обим $2s$ једно је тјеме на правој $x + y = s$. Кад је обим правоуглог троугла $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = a$ константан, тада је једно тјеме на хиперболи $(x - a)(y - a) = a^2/2$, тј. на њеном дијелу у $[0, a] \times [0, a]$. Сад је први задатак сводљив на други, а читалац ће са мало преосталих детаља тако доћи до још једног (петог) рјешења нашег полазног задатка.