

Љубинка Петковић

УВОЂЕЊЕ НОВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Методу увођења нове променљиве у неодређеном интегралу представљамо дијаграмом

$$\begin{array}{ccc}
 \int f(x) dx & & \Phi(u^{-1}(x)) + C \\
 x=u(t) \downarrow & & \uparrow \\
 \int f(u(t))u'(t) dt & \longrightarrow & \Phi(t) + C
 \end{array}$$

Пуне стрелице значе:

- (1) увођење нове променљиве;
- (2) рачунање интеграла, тј. претпостављамо да је $\Phi'(t) = f(u(t))u'(t)$;
- (3) враћање на стару променљиву, тј. t замењујемо са $u^{-1}(x)$.

Шта чини ову методу легитимном?

Прво, $\int f(x) dx$ схватамо као задатак одређивања класе примитивних функција за функцију f за коју претпостављамо да је дефинисана на интервалу I , тј. $f: I \rightarrow \mathbf{R}$.

Друго, функција u мора имати инверзну функцију, бити диференцијабилна и пресликавати неки интервал J на интервал I , тј.

$$u: J \rightarrow I, \quad u^{-1}: I \rightarrow J.$$

Тада претпостављамо да функција

$$J \ni t \mapsto f(u(t))u'(t)$$

има примитивну функцију $\Phi: J \rightarrow \mathbf{R}$, а доказујемо да је

$$I \ni x \mapsto \Phi(u^{-1}(x))$$

примитивна функција за функцију $f: I \rightarrow \mathbf{R}$.

Погледајмо доказ. Имаћемо:

$$\begin{aligned}
 (\Phi(u^{-1}(x)))' &= \Phi'(t) \cdot t'_x && \text{(диференцијал сложене функције)} \\
 &= f(u(t))u'(t) \cdot t'_x \\
 &= f(u(t))u'(t) \cdot \frac{1}{u'(t)} && \text{(диференцијал инверзне функције)} \\
 &= f(u(t)) = f(x).
 \end{aligned}$$

Примећујемо да доказ захтева претпоставку: $(\forall t \in J) u'(t) \neq 0$.

С друге стране, често и без бриге примењујемо ову методу и у случају кад овај услов није испуњен. На пример, рачунајући $A = \int \sqrt{1-x^2} dx$ поступамо овако: $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$,

$$\begin{aligned} A &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \\ &= \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C. \end{aligned}$$

Истичући детаље имаћемо: $I = [-1, 1]$, $J = [-\pi/2, \pi/2]$, $u(t) = \sin t$, $u'(t) = \cos t$ и $u'(-\pi/2) = u'(\pi/2) = 0$!

Ипак, функција $x \mapsto \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$ је дефинисана на $[-1, 1]$ и извод јој је $\sqrt{1-x^2}$ (мада $\arcsin x$ и $x\sqrt{1-x^2}$ нису диференцијабилне у тачкама 1 и -1).

Слично поступамо и у примеру

$$B = \int \frac{dx}{x^2 - 1}, \quad \text{где је: } \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, & dx = \operatorname{sh} t dt, & x \in (1, +\infty), \\ x = -\operatorname{ch} t, & dx = -\operatorname{sh} t dt, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Рачунајући имамо:

$$B = \begin{cases} \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t} dt = \int dt = t + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C_1, & x > 1, \\ \int \frac{-\operatorname{sh} t}{-\operatorname{sh} t} dt = \int dt = t + C_2 = \ln[-(x + \sqrt{x^2 - 1})] + C_2, & x < -1. \end{cases}$$

Ако погледамо детаљно: $I = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $J = (0, +\infty)$; $u(t) = \operatorname{ch} t$, односно $u(t) = -\operatorname{ch} t$; $u'(t) = \operatorname{sh} t$, односно $u'(t) = -\operatorname{sh} t$ и $u'(0) = 0$. Ипак, функција $x \mapsto F(x)$, где је

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & x \in (1, +\infty), \\ \ln[-(x + \sqrt{x^2 - 1})], & x \in (-\infty, -1), \end{cases}$$

дефинисана је на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и извод јој је $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, мада $F(x)$ није диференцијабилна у тачкама -1 и 1 .

Рашчистимо ситуацију правећи опште претпоставке.

Нека је, додатно, f непрекидна функција и нека је $u'(t_0) = 0$ само за $t_0 \in J$. Докажимо да је и тада $(\Phi(u^{-1}(x)))' = f(x)$ (укључујући и тачку $x_0 = u(t_0)$).

Формула важи у свим тачкама $x = u(t)$ где је $t = t_0$ (према већ изведеном доказу). За $x = x_0$ имамо по Лагранжовој теорему:

$$\frac{\Phi(u^{-1}(x)) - \Phi(u^{-1}(x_0))}{x - x_0} = f(\xi),$$

где је ξ између x и x_0 . Кад $x \rightarrow x_0$, $f(\xi) \rightarrow f(x_0)$, па је функција $\Phi(u^{-1}(x))$ диференцијабилна и у тачки x_0 , а за извод има $f(x_0)$.

Овај случај се лако проширује и на случај када је $u'(t) = 0$ за коначан број вредности $t \in J$.