

Мирјана Јовчић

## ВАРИЈАЦИЈЕ

### Уводни део часа

Садржи повезивање са градивом обрађеним на претходним часовима (правило збира и производа, конфигурације у којима су важни само елементи који улазе у њихов састав и конфигурације у којима је, поред тога, битан и редослед елемената).

Полазимо од примера којим ћемо делимично поновити градиво са претходног часа.

**ПРИМЕР 1.** Дат је скуп  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Колико има двоцифрених бројева који се записују помоћу цифара скупа  $A$ , ако се цифре:

- а) не могу понављати у запису;
- б) могу понављати у запису?

*Одговор.* На прво постављено питање ученици, углавном, одговоре  $4 \cdot 3$  уз објашњење да за запис једне цифре (десетица или јединица) можемо употребити било коју од 4 задате цифре и за запис друге цифре (јединица или десетица) три цифре (све осим употребљене). Дакле, укупно је могуће записати 12 двоцифрених бројева датим цифрама.

Или, сваки двоцифрени број је уређена двојка (пар) елемената скупа  $A$  (од 4 елемента). Значи, из скупа од 4 елемента формирамо уређене низове дужине 2 (класе 2) и укупан број двоцифрених бројева, у чијем запису се не могу понављати цифре је:

$$V_n^k = V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

### Главни део часа

После овога прелазимо на други део задатка (пример 1б).

Слично као у претходном захтеву, за запис једне цифре (десетица или јединица) можемо употребити било коју од четири задате цифре, али и за запис друге цифре можемо употребити било коју од четири задате цифре. Дакле, има  $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$  двоцифрених бројева који се могу записати цифрама 1, 2, 3 и 4 ако се цифре могу понављати у запису тих бројева.

Или, за запис једног броја потребна нам је уређена двојка ( $k = 2$ ) из скупа од 4 елемента, али овде елементи могу да се понављају и њихов укупан број је  $4^2 = 16$ .

**ПРИМЕР 2.** Колико има троцифрених бројева који се записују помоћу цифара скупа  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , ако се цифре:

- а) не могу понављати у запису;
- б) могу понављати у запису?

*Одговор.* а) Сада иде лако (на основу примера 1а, јер за запис треће цифре постоје два избора) и ученици налазе да је тражени број

$$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \quad (n = 4, k = 3, k < n).$$

б) Ученици без проблема дају одговор да за запис сваке цифре при формирању троцифреног броја можемо употребити било који елемент скупа  $A$  ( $n = 4$ ), јер се цифре могу понављати. Таквих бројева је

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64, \quad (n = 4, k = 3).$$

ПРИМЕР 3. Колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара скупа  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , ако се цифре:

- а) не могу понављати у запису;
- б) могу понављати у запису?

*Одговор.* Индукција већ делује и ученици лако налазе да таквих бројева има:

- а)  $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 = 4! = 24$  и  $V_4^4 = P_4$ ,  $4 = n = k$ ;
- б)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$ , где је  $n = 4$ ,  $k = 4$ , тј.  $n = k$ .

ПРИМЕР 3. Колико има петоцифрених бројева који се записују помоћу цифара скупа  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , ако се цифре:

- а) не могу понављати;
- б) могу понављати?

*Одговор.* а) С обзиром да нам је потребна уређена петорка формирана од елемената скупа  $A$ , којих има 4, а није дозвољено понављање, такву 5-орку је немогуће формирати. Приметимо да је  $n = 4$ ,  $k = 5$  и  $k > n$ .

б) С обзиром да се цифре могу понављати, могуће је записати  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$  ( $n = 4$ ,  $k = 5$  и  $k > n$ ) петоцифрених бројева са траженом особином.

Коментаришемо — дакле, код варијација без понављања  $k$ -те класе од  $n$  елемената обавезно мора бити  $k \leq n$ , јер је немогуће формирати уређену  $(n+1)$ -торку састављену од различитих елемената датог скупа (бар два елемента се морају поновити). Код варијација тог ограничења нема и њихов укупан број је  $n^k$ .

ДЕФИНИЦИЈА. Нека је дат скуп  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Низ  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  дужине  $k$  елемената из  $A$  назива се варијација класе  $k$  елемената скупа  $A$ .

ТЕОРЕМА. Укупан број варијација  $k$ -те класе од  $n$  елемената једнак је

$$\bar{V}_n^k = n^k.$$

ПРИМЕР 5. Колико има троцифрених бројева у чијем запису учествују цифре 0, 1, 2, 3 и 4 (а цифре могу да се понављају)?

*Одговор.* Ученици дају објашњење слично из примера 1б. За запис цифре стотина можемо употребити било коју од цифара 1, 2, 3, 4 (све осим 0) — има их 4, а за запис цифре десетица и јединица било коју од цифара 0, 1, 2, 3 и 4 (има их 5). Дакле, укупан број таквих троцифрених бројева је

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Неки ученици задатак решавају и овако:

За запис троцифреног броја издајамо уређену тројку цифара ( $k = 3$ ) од попуњених 5 ( $n = 5$ ), којих је  $\bar{V}_5^3 = 5^3 = 125$ . Међутим, постоје и уређене тројке које нису троцифрени бројеви (оне чији је први елемент 0) и њих је  $\bar{V}_5^2 = 5^2 = 25$  ( $n = 5, k = 2$ ). Дакле, број свих троцифрених бројева који се могу формирати помоћу цифара 0, 1, 2, 3 и 4 је

$$\bar{V}_5^3 - \bar{V}_5^2 = 5^3 - 5^2 = 125 - 25 = 100.$$

ПРИМЕР 6. На тикету спортске прогнозе налази се 13 сусрета.

- а) Колико различитих попуњених колона обезбеђује 13 тачних погодака?
- б) Колико колона можемо попуњити ако се фиксирају резултати пет сусрета?
- в) Колико колона можемо попуњити ако претпоставимо да првих седам сусрета неће бити нерешено?

*Одговор.* а) Уобичајено је да је победа првог тима — 1, другог — 2, нерешено — 0, па је једно попуњавање тикета уређена 13-торка ( $k = 13$ ) формирана од елемената скупа  $A = \{0, 1, 2\}$  ( $n = 3$ ). Укупан број различито попуњених колона је једнак

$$\bar{V}_n^k = \bar{V}_3^{13} = 3^{13} = 1\,534\,323.$$

- б) И овде се лако добија да може да се попуни  $\bar{V}_3^8 = 3^8 = 6551$  колона.

в) За формирање једне колоне потребне су нам уређене 7-орке од елемената скупа  $\{1, 2\}$  и уређене 6-орке од елемената скупа  $\{0, 1, 2\}$ . Укупан број различито попуњених колона је

$$\bar{V}_2^7 \cdot \bar{V}_3^6 = 2^7 \cdot 3^6 = 93\,312.$$

ПРИМЕР 7. Одредити  $n$  ако је  $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \bar{V}_n^3$ .

*Одговор.* Ученици имају отпор при решавању оваквих задатака, док не „открију“ шта су  $V_n^3$  и  $\bar{V}_n^3$ , а задатак се своди на решавање једначине

$$9n(n-1)(n-2) = 5n^3.$$

После дељења леве и десне стране са  $n$  ( $n \neq 0$ ) и сређивања, једначина постаје

$$4n^2 - 27n + 18 = 0$$

и решења су јој  $n = 6$  и  $n = 3/4$ . Друго решење не задовољава услов да је  $n$  природан број и једино решење је  $n = 6$ .

### Завршни део часа

РЕЗИМЕ (ТРЕБА ЗАПАМТИТИ). Варијација класе  $k$  од  $n$  елемената скупа  $A$  је било која уређена  $k$ -торка елемената скупа  $A$ ; има их  $\bar{V}_n^k = n^k$ .

ДОМАЋИ ЗАДАТАК: 1. Колико различитих шестоцифрених бројева можемо записати цифрама 0, 1, 2, 3?

2. Колико се Морзевих знакова може написати од оба основна знака „,“ и „–“, ако се један Морзев знак састоји од четири основна знака?

3. Одредити  $n$  ако је број варијација треће класе од  $n$  елемената већи за 480 од броја варијација треће класе без понављања од истог броја елемената.

4. Колико има железничких станица на једној прузи ако за разна путовања (истим разредом) том пругом постоје 552 различите возне карте?