
ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Др Павле Младеновић

11. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА НОВИ САД, ЈУГОСЛАВИЈА, 8–14. МАЈ, 1994.

Балканска математичка олимпијада (БМО) је математичко такмичење ученика средњих школа балканских земаља. 11. БМО одржана је у Новом Саду у времену од 8. до 14. маја 1994. године. Организатори такмичења били су Друштво математичара Србије и Универзитет у Новом Саду, а покровитељ Савезно министарство за просвету и културу. На такмичењу су учествовале шесточлане екипе из Бугарске, Кипра, Грчке, Румуније и Југославије. Чланови југословенске екипе били су:

1. **Давидовић Милена**, IV разред Математичке гимназије Београд;
2. **Ирић Игор**, IV разред Гимназије „Бора Станковић“, Врање;
3. **Каделбург Весна**, IV разред Математичке гимназије Београд;
4. **Кртинић Ђорђе**, III разред Математичке гимназије Београд;
5. **Салом Игор**, III разред Математичке гимназије Београд;
6. **Тремл Мирослав**, III разред Гимназије у Илијашу, Илијаш.

Такмичари су решавали 4 задатка које је одабрао Жири БМО, дозвољено време за израду задатака било је 4.5 часова, а сваки задатак вредео је 10 поена, тј. максималан број поена био је 40. Границе за доделу златних, сребрних и бронзаних медаља биле су 34, 14 и 8 поена. Додељено је 15 медаља и то: 4 златне, 5 сребрних и 6 бронзаних. Само један ученик, Николај Николов из Бугарске освојио је максималан број од 40 поена. Расподела медаља приказана је у следећој табели:

ЗЕМЉА	ЗЛАТО	СРЕБРО	БРОНЗА	ПОЕНИ
БУГАРСКА	3	2	—	156
РУМУНИЈА	1	2	1	85
ЈУГОСЛАВИЈА	—	1	2	57
ГРЧКА	—	—	2	34
КИПАР	—	—	1	21

Напомена: Седмочлана екипа из Московске специјалне школе „А. Н. Колмогоров“ учествовала је незванично на 11. БМО и освојила у збиру 41 поен.

ЗАДАЦИ

1. Дат је оштар угао XAY и тачка P унутар њега. Конструисати (помоћу лежира и шестара) праву која пролази кроз тачку P и сече краке AX и AY редом у тачкама B и C , тако да је површина троугла ABC једнака AP^2 .

(Кипар)

2. Доказати да полином

$$x^4 - 1994x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m,$$

где је m цео број, има највише један целобројни корен.

(Грчка)

3. Нека је $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ пермутација бројева $1, 2, \dots, n$, где је $n \geq 2$. Израчунати највећу могућу вредност израза

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

(Румунија)

4. Наћи најмањи број $n > 4$, за који постоји скуп од n људи, тако да свака два који се познају немају заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно два заједничка познаника.

(Познанство је симетрична релација: ако A познаје B , онда и B познаје A .)

(Бугарска)

Решења:

1. (Решење жирија 11. БМО)

Нека је ABC тражени троугао и нека су D и E тачке на правој AB , тако да је $PD \parallel AC$ и $PE \perp AB$, слика 1. Означимо $AP = p$, $AD = d$, $PE = h$ и $DB = x$. Дужи p , d и h су дате, а задатак је да се конструише дуж x .

Из услова $PD \parallel AC$, следи да је $\triangle ABC \sim \triangle DBP$. Користећи ту чињеницу и означавајући површину троугла XYZ са S_{XYZ} , добијамо

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{AB^2}{DB^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBP}} = \frac{p^2}{xh/2} = \frac{2p^2}{xh},$$

и следствено томе

$$(1) \quad x^2 - 2\frac{p^2 - dh}{h}x + d^2 = 0.$$

Означимо $b = \frac{p^2 - dh}{h}$. Тада се једначина (1) може записати у следећем облику

$$(2) \quad x^2 - 2bx + d^2 = 0.$$

Сл. 1

Сл. 2

Ако су x_1 и x_2 решења једначине (2), онда је $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1 x_2 = d^2$.

Конструкција. Прво конструишемо дуж $b = \frac{p^2 - dh}{h} = \frac{p^2}{h} - d$. Затим конструишемо дуж $MN = 2b$ и круг k са пречником MN . Конструишемо праву s тако да је $s \parallel MN$ и да је растојање између s и MN једнако d . Нека је S пресечна тачка праве s и круга k . Конструишемо праву t која садржи тачку S и нормална је на праву MN . Нека је T пресечна тачка правих t и MN . Тада, дужи MT и NT могу бити узете за дуж x .

Заиста, из констрикције следи да је $\triangle SMT \sim \triangle NST$ и $MT : ST = ST : TN$. Даље добијамо да је

$$MT \cdot TN = ST^2 = d^2, \quad MT + TN = MN = 2b.$$

Према томе, $x_1 = MT$, $x_2 = TN$. Приметимо да задатак има два решења ако је $d < b$, тј. $2dh < p^2$, односно једно решење ако је $2dh = p^2$.

2. (Решење ученика Мирослава Тремла)

Нека су x_1, x_2, x_3, x_4 нуле датог полинома. Претпоставимо да су бар две од њих, на пример x_1 и x_2 , цели бројеви. На основу Виетове теореме добијамо

- (1) $x_1 x_2 x_3 x_4 = m,$
- (2) $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 11,$
- (3) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 1993 + m,$
- (4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1994.$

Једнакости (2) и (3) могу се записати у облику:

- (5) $(x_1 + x_2)x_3 x_4 + x_1 x_2(x_3 + x_4) = 11,$
- (6) $x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = 1993 + m.$

Из једнакости (4) следи да је $x_3 + x_4$ цео број. Користећи ту чињеницу добијамо из (6) да је $x_3 x_4$ такође цео број. Размотримо следећа два случаја:

Случај 1. *Бар један од бројева x_1 и x_2 је паран.* Претпоставимо, на пример, да је x_1 паран број. Из (1) следи да је m паран број. Из (5) следи да је

сваки од бројева $x_1 + x_2$ и x_3x_4 непаран. Користећи ове чињенице добијамо из (6) да је $x_3 + x_4$ паран број, а из (4) следи да је $x_3 + x_4$ непаран број. Контрадикција.

Случај 2. *Бројеви x_1 и x_2 су оба непарни.* Из (4) следи да је $x_3 + x_4$ паран број, а из (5) следи да је $x_3 + x_4$ непаран број. Контрадикција.

3. (Решење Жирија 11. БМО)

За сваку пермутацију $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ бројева $1, 2, \dots, n$ размотримо збир

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| + |a_1 - a_n|.$$

Тај збир се може представити у облику

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k,$$

где је $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ и $a_{n+1} = a_1$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$. Означимо $b_k = \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тада се збир $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ може представити у облику

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot k,$$

где је $b_k \in \{-2, 0, +2\}$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0$. Према томе, бројеви $+2$ и -2 појављују се једнак број пута међу b_k -овима. Следи да је

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_m) - 2(y_1 + y_2 + \dots + y_m),$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ различити бројеви из $\{1, 2, \dots, n\}$. Лако је установити да се максимална вредност израза $2(x_1 + x_2 + \dots + x_m) - 2(y_1 + y_2 + \dots + y_m)$ достиже када је $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, \dots, x_m\} &= \{n, n-1, \dots, n-m+1\}, \\ \{y_1, y_2, \dots, y_m\} &= \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned}$$

а та максимална вредност је $2m(n-m)$. Сада, размотримо следећу пермутацију бројева $1, 2, \dots, n$: $a_{2k-1} = n-m+k$ и $a_{2k} = k$ за $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = m$, и, ако је n непаран број, $a_n = m+1$. За ту пермутацију важи $S(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2m(n-m)$ и $|a_1 - a_n| = 1$. Према томе, тражени максимум збира $S(a_1, a_2, \dots, a_n) - |a_1 - a_n|$ једнак је

$$2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) - 1,$$

тј. $\frac{n^2-2}{2}$ ако је n паран број, односно $\frac{n^2-3}{2}$ ако је n непаран број.

4. (Решење Жирија 11. БМО)

Нека је A лице из скупа од n људи, за који важе услови задатка. Означимо са $a_1, a_2, \dots, a_p$ све познанике лица A , а са $u_1, u_2, \dots, u_q$ сва лица која не познају особу A . Постоји бијекција између скупа $\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ и скупа свих парова (a_i, a_j) , где је $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p$ и $i \neq j$. Заиста, пошто су a_i и a_j познаници лица A , то се они међусобно не познају (ако би се познавали, онда би (A, a_i, a_j) била тројка познаника, каква не постоји сагласно условима задатка). Следи да постоји лице B које познаје и a_i и a_j истовремено. Лице B не познаје A (ако B познаје A , тада су (A, B, a_i) и (A, B, a_j) тројке познаника, што је немогуће).

Обрнуто, ако B не познаје A , тада сагласно условима задатка постоје тачно две особе a_i и a_j које су познаници и A и B истовремено. Пар (a_i, a_j) кореспондирамо лицу B . Ова кореспонденција је инјективна. Заиста, ако су (a_i, a_j) и (a_k, a_l) различити парови који су кореспондирани истој особи B која не познаје A , тада међу a_i, a_j, a_k, a_l постоје најмање три различита познаника лица A и B , што је немогуће. На основу претходно реченог закључујемо да је

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{и према томе} \quad n = \frac{p(p-1)}{2} + p + 1.$$

Дакле, $p^2 + p - 2(n-1) = 0$ и та једначина има тачно једно позитивно решење. Према томе, број p је исти за све чланове датог скупа од n људи. Даље добијамо:

ако је $p = 1$, онда је $n = 2$;
ако је $p = 2$, онда је $n = 4$;
ако је $p = 3$, онда је $n = 7$;
ако је $p = 4$, онда је $n = 11$;
ако је $p = 5$, онда је $n = 16$; итд.

Размотримо случај $p \geq 3$. Следи да постоје две особе a_1 и a_2 које се не познају међусобно. На основу услова задатка постоје тачно две особе u_1 и u_2 које су познаници пара (a_1, a_2) . Имамо следећи граф:

$u_1 \bullet \qquad \qquad \bullet u_2$

$a_1 \bullet \qquad \qquad \bullet a_2$

У сваком врху постоје још $p-2$ страница графа. Дакле, има најмање $4(p-2) + 4 = 4(p-1)$ страница. Даље добијамо да је $n \geq 4(p-1)$, што не важи за $p = 3$ и $p = 4$. Случај $p = 5$ ($n = 16$) има конкретну реализацију. То показује пример скупа од 16 људи $\{1, 2, \dots, 16\}$, где су сви парови познаника следећи парови: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 10), (2, 13), (2, 15), (2, 16), (3, 9), (3, 12), (3, 14), (3, 16), (4, 8), (4, 11),$

(4, 14), (4, 15), (5, 7), (5, 11), (5, 12), (5, 13), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (7, 14), (7, 15), (7, 16), (8, 12), (8, 13), (8, 16), (9, 11), (9, 13), (9, 15), (10, 11), (10, 12), (10, 14), (11, 16), (12, 15), (13, 14). Према томе, одговор је $n = 16$.

4. Напомене

Жири је задатке предложене на такмичењу класификовао по тежини на следећи начин: први – лак, други – лак, трећи – средње тежине, четврти – тежак. Резултати наших ученика били су следећи:

Име ученика	1	2	3	4	Σ	медаља
Давидовић Милена	0	2	4	2	8	бронза
Ирић Игор	0	0	4	3	7	—
Каделбург Весна	1	1	3	3	8	бронза
Кртинић Ђорђе	0	2	2	0	4	—
Салом Игор	0	0	2	4	6	—
Тремл Мирослав	0	10	9	5	24	сребро
Σ	1	15	24	17	57	

ОБАВЕШТЕЊЕ

9. КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА ЈУГОСЛАВИЈЕ

Петровац н.м, 22–27. мај 1995.

На основу одлуке Извршног одбора Савеза друштава математичара Југославије, 9. конгрес математичара Југославије одржаће се у Петровцу на мору, од 22.–27.05.1995. године. Рад Конгреса одвијаће се на пленарним (евентуално паралелним) седницама и у следећим *секцијама*:

1. Алгебра и логика; 2. Теорија бројева и алгебарска геометрија; 3. Геометрија и топологија; 4. Lie-ове групе и репрезентације; 5. Реална и комплексна анализа; 6. Операторне алгебре и функционална анализа; 7. Вероватноћа и статистика; 8. Парцијалне диференцијалне једначине; 9. Обичне диференцијалне једначине и динамички системи; 10. Комбинаторика и теорија графова; 11. Нумеричка анализа и оптимизација; 12. Рачунарске науке; 13. Настава и популаризација математике; 14. Историја математике.

Пријаве учешћа и евентуална саопштења достављају се на адресу Организационог одбора до 15.02., а резиме саопштења до 31.03.1995. године.

Котизација у износу 50 дин. (на бази паритета 1 DEM=1 дин) уплаћује се на рачун Организационог одбора до 30.04.1995. године.

Адреса и рачун Организационог одбора:

Природно-математички факултет (ПМФ), 81000 Подгорица, Петивишки пут бб, п.ф. 211, телефон 081–14 482, факс 081–14 459, рачун: 50105–603–1–5701 (ПМФ)