

Др Милосав Марјановић

КОНВЕКСНЕ И КОНКАВНЕ ФУНКЦИЈЕ И КОРЕСПОНДЕНТНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

други део¹

5. Приметимо да неједнакост Петровића важи и кад је $f: [0, b] \rightarrow \mathbf{R}$ конвексна функција а $x_1, \dots, x_n$ позитивни бројеви такви да је $x_1 + \dots + x_n = s \leq b$.

Функција $\varphi(x) = f(a+x)$, $a \in [0, b]$ је такође конвексна, јер је

$$\begin{aligned}\varphi[(1-\alpha)x + \alpha y] &= f[a + (1-\alpha)x + \alpha y] = f[(1-\alpha)(a+x) + \alpha(a+y)] \\ &\leq (1-\alpha)f(a+x) + \alpha f(a+y) = (1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y),\end{aligned}$$

за $\alpha \in [0, 1]$ и $x, y \in [-a, b-a]$.

Примењујући неједнакост Петровића на функцију φ , имаћемо

$$\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n) \leq \varphi(x_1 + \dots + x_n) + (n-1)\varphi(0),$$

односно

$$f(a+x_1) + \dots + f(a+x_n) \leq f(a+x_1 + \dots + x_n) + (n-1)f(a),$$

где су $x_1, \dots, x_n$ позитивни и $x_1 + \dots + x_n \leq b-a$.

Специјално, кад је $n=2$, имамо

$$(7) \quad f(a+x_1) + f(a+x_2) \leq f(a+x_1+x_2) + f(a),$$

и пишући $b_1 = a+x_1+x_2$, $b_2 = a+x_1$, $b_3 = a$, биће $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$, па неједнакост (7) постаје

$$(8) \quad f(b_1 - b_2 + b_3) \leq f(b_1) - f(b_2) + f(b_3).$$

Докажимо сад следећу неједнакост: Нека је $f: [0, b_1] \rightarrow \mathbf{R}$ конвексна функција и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2n+1} \geq 0$. Тада важи неједнакост

$$f(b_1 - b_2 + \dots + b_{2n+1}) \leq f(b_1) - f(b_2) + \dots + f(b_{2n+1})$$

(G. Szegő, Math. Zeitschrift, 52 (1950))

За $n=1$, ова неједнакост се своди на (8). Претпостављајући да она важи за $n-1$, где је $n \geq 1$, докажимо да ће важити и за n .

Приметимо да је $b' = b_1 - b_2 + \dots + b_{2n-1} \geq b_{2n-1} \geq b_{2n} \geq b_{2n+1}$. Тада, према (8),

$$\begin{aligned}f(b' - b_{2n} + b_{2n+1}) &\leq f(b') - f(b_{2n}) + f(b_{2n+1}) \\ &\leq f(b_1) - f(b_2) + \dots + f(b_{2n-1}) - f(b_{2n}) + f(b_{2n+1}).\end{aligned}$$

¹Први део овог чланка објављен је у претходном броју Наставе математике, XL, 1-2

6. Нека је $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ конвексна функција, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и a , $a + x_1$, $a + x_2$, $a + x_1 + x_2$ нека припадају скупу I . Тада, упоређујући ординате сечица на слици, које одговарају тачки $c = a + (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$,

очигледно важи неједнакост

$$(9) \quad (1 - \alpha)f(a + x_1) + \alpha f(a + x_2) \leq f(a) + \frac{(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2}{x_1 + x_2} [f(a + x_1 + x_2) - f(a)].$$

Ову неједнакост можемо доказати не ослањајући се на очигледност. Наиме, препишимо је у виду

$$(10) \quad (1 - \alpha)f(a + x_1) + \alpha f(a + x_2) \leq (1 - \beta)f(a) + \beta f(a + x_1 + x_2),$$

где је $\beta = \frac{(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2}{x_1 + x_2}$. Даље, из

$$\begin{aligned} a + x_1 &= (1 - \gamma_1)a + \gamma_1(a + x_1 + x_2), & \gamma_1 &= \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \\ a + x_2 &= (1 - \gamma_2)a + \gamma_2(a + x_1 + x_2), & \gamma_2 &= \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \end{aligned}$$

пошто је f конвексна, имаћемо

$$\begin{aligned} f(a + x_1) &\leq (1 - \gamma_1)f(a) + \gamma_1 f(a + x_1 + x_2), \\ f(a + x_2) &\leq (1 - \gamma_2)f(a) + \gamma_2 f(a + x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Множећи прву неједнакост са $(1 - \alpha)$, а другу са α и сабирајући добијамо

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)f(a + x_1) + \alpha f(a + x_2) \\ \leq [(1 - \gamma_1)(1 - \alpha) + (1 - \gamma_2)\alpha]f(a) + [\gamma_1(1 - \alpha) + \gamma_2\alpha]f(a + x_1 + x_2), \end{aligned}$$

што сређивањем даје (10).

У специјалном случају кад је $\alpha = 1/2$, неједнакост (9) постаје

$$f(a + x_1) + f(a + x_2) \leq f(a) + f(a + x_1 + x_2),$$

а то је неједнакост (7), која је специјални случај неједнакости Петровића и основни корак за доказ неједнакости Szegő-а. Њено геометријско тумачење имамо на претходној слици кад је тачка c средиште интервала $[x + a_1, x + a_2]$.

5. Уопштење основне неједнакости. Нека је $x_1, x_2, \dots, x_n$ низ произвољних реалних бројева, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ низ ненегативних бројева такав да је $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Тада израз

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

називамо *конвексна комбинација* бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$, чиме генералишемо ранији случај такве комбинације два броја.

Кад је $\underline{x} = \min_i \{x_i\}$, $\overline{x} = \max_i \{x_i\}$, тада је

$$\underline{x} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \leq \overline{x},$$

тј. све се конвексне комбинације бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ налазе у интервалу $[\underline{x}, \overline{x}]$. Приметимо да кад је $n > 2$, тачке овог интервала могу бити представљене као конвексне комбинације бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ на бесконачно много начина.

Сад ћемо формулисати уопштење основне неједнакости за конвексне функције, а које, изражавајући се лежерно, каже: „еф“ од конвексне комбинације једнако је или мање од конвексне комбинације „ефова“. Ево тачне формулације.

ТЕОРЕМА. Нека је $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ конвексна (одн. конкавна) функција и нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ произвољне тачке интервала I . Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ненегативни бројеви такви да је $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Тада важи неједнакост

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

(одн. неједнакост

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).)$$

Доказ. За $n = 2$, теорема се своди на ону већ доказану у параграфу 3 ($\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_1 = 1 - \alpha$). Претпоставићемо да је $n > 2$ и доказ провести индукцијом по n .

Претпоставимо да је неједнакост тачна за $n - 1 \geq 2$. Посматрајући случај кад имамо конвексну комбинацију n бројева, неједнакост је по индукцијској претпоставци тачна кад је неко α_i једнако 0 или 1. Зато претпоставимо $(\forall i) 0 < \alpha_i < 1$.

Нека је $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$ и $y = \frac{\alpha_1}{s}x_1 + \frac{\alpha_2}{s}x_2 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{s}x_{n-1}$, па је тада $s + \alpha_n = 1$ и тачка y припада интервалу I . Примењујући основну неједнакост (случај $n = 2$) и индукцијску претпоставку, имаћемо

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) &= f(sy + \alpha_n x_n) \leq sf(y) + \alpha_n f(x_n) \\ &\leq s \left(\frac{\alpha_1}{s} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{s} f(x_2) + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{s} f(x_{n-1}) \right) + \alpha_n f(x_n) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n), \end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

Напомена. Кад је: $(\forall i) 0 < \alpha_i < 1$, уопштена неједнакост своди се на једнакост ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (а што лако проверавамо анализирајући претходни доказ).

Ова уопштена неједнакост назива се *неједнакост Jensen-а*.

6. Примери. У овом параграфу примењиваћемо Jensen-ову неједнакост у случају посебно бираних функција.

1. Функција $y = \ln x$ је конкавна. За позитивне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$ и ненегативне $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, имаћемо

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_n \ln x_n.$$

Антилогаритмујући, следи

$$(11) \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Кад је $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, добијамо

$$(12) \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

што је уопштена неједнакост о односу геоетријске и аритметичке средине.

Примењујући неједнакост (12) на низ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, имамо

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}},$$

односно

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

а што је уопштена неједнакост о односу хармонијске и геометријске средине.

Кад су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни бројеви, узимајући $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ и $\alpha_i = \frac{x_i}{x}$, неједнакост (11) постаје

$$x_1^{x_1/x} \cdot x_2^{x_2/x} \cdot \dots \cdot x_n^{x_n/x} \leq \frac{x_1^2}{x} + \frac{x_2^2}{x} + \dots + \frac{x_n^2}{x}.$$

Из ове неједнакости изводимо

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \implies x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \dots \cdot x_n^{x_n} \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

односно

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \implies (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq \frac{1}{x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \dots \cdot x_n^{x_n}}.$$

2. Као што смо већ проверавали, функција $f(x) = x^a$, $x > 0$ је конвексна кад је $a \geq 1$, а конкавна кад је $0 < a \leq 1$.

Кад је $a = 2$ и $\alpha_i = \frac{1}{n}$, имаћемо неједнакост

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Из ове неједнакости изводимо

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \implies x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \implies x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \sqrt{n}.$$

Претпоставимо да су $x_1, x_2, \dots, x_n$ позитивни и $a \geq 1$. Из неједнакости

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)^a \leq \alpha_1 x_1^a + \alpha_2 x_2^a + \cdots + \alpha_n x_n^a,$$

узимајући $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $\alpha_i = \frac{x_i}{x}$, добијамо

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^a \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{a-1} (x_1^{a+1} + x_2^{a+1} + \cdots + x_n^{a+1}),$$

односно посебно кад је $a = 2$,

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3),$$

а одакле, даље

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \implies (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3.$$

3. Нека је

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

матрица чији су елементи ненегативни бројеви, а њихови зборови по врстама и колонама нека износе 1. Пишући неједнакост (11), за позитивне $x_1, x_2, \dots, x_n$ имаћемо

$$x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}} \leq \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Сумирајући ових n неједнакости, добијамо

$$x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots x_n^{\alpha_{1n}} + \cdots + x_1^{\alpha_{n1}} x_2^{\alpha_{n2}} \cdots x_n^{\alpha_{nn}} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Посебно за матрице

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 0 & \cdots & 1/3 \end{bmatrix}$$

имаћемо следеће две неједнакости

$$(13) \quad \sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \cdots + \sqrt{x_n x_1} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$(14) \quad \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} + \sqrt[3]{x_2 x_3 x_4} + \cdots + \sqrt[3]{x_n x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Наравно ове и сличне њима неједнакости важе при произвољној пермутацији бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$.

4. Нека је $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ конвексна функција и нека су бројеви $a, x_1, x_2, \dots, x_n$ позитвни. Означавајући $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, имаћемо

$$a + x_i = \left(1 - \frac{x_i}{x}\right) a + \frac{x_i}{x} (a + x).$$

Пошто је f конвексна, биће

$$f(a + x_i) \leq \left(1 - \frac{x_i}{x}\right) f(a) + \frac{x_i}{x} f(a + x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ненегативни бројеви чији је збир 1. Множећи претходне неједнакости са α_i и сумирајући, добијамо

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(a + x_1) + \dots + \alpha_n f(a + x_n) \\ \leq \left(1 - \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{x}\right) f(a) + \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{x} f(a + x). \end{aligned}$$

Тако добијамо уопштену неједнакост Петровића, која се за $a = 0, \alpha_i = \frac{1}{n}$ своди на ону из 4.4.

7. Поређење конвексних комбинација. Нека су $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и $M = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ два низа ненегативних бројева. Дефинишимо релацију поредка на скупу свих таквих n -низова на следећи начин: $\Lambda \succcurlyeq M$ ако је

$$\lambda_1 \geq \mu_1, \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n.$$

(Проверите да је то заиста релација поредка.)

На пример, за низове

$$\Lambda = (1, 1, 0), \quad M = (1, 0, 1), \quad N = (0, 1, 1)$$

биће $\Lambda \succcurlyeq M \succcurlyeq N$, док низови $(1, 0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1, 0)$ нису упоредиви.

ТЕОРЕМА. Нека су $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и $M = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ два низа ненегативних бројева и нека је $\Lambda \succcurlyeq M$. Ако је низ бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ растући (одн. опадајући), тада важи неједнакост

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \leq \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n$$

(одн. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n$).

Доказ. Неједнакост је тривијално тачна за $n = 1$ ($\lambda_1 = \mu_1, \lambda_1 x_1 = \mu_1 x_1$). Сад ћемо доказ провести индукцијом и претпоставимо да је неједнакост тачна за $n \geq 1$.

За низове ненегативних бројева

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}), \quad M = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_{n+1})$$

претпоставимо $\Lambda \succcurlyeq M$ и нека је $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ растући низ. Пошто је

$$\Lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n + \lambda_{n+1}) \succcurlyeq M' = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n + \mu_{n+1})$$

имаћемо, на основу индукцијске претпоставке,

$$(a) \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) x_n \\ \leq \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + (\mu_n + \mu_{n+1}) x_n.$$

Из $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geq \mu_1 + \cdots + \mu_n$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = \mu_1 + \cdots + \mu_n + \mu_{n+1}$, следи $\lambda_{n+1} \leq \mu_{n+1}$, па множећи ову неједнакост са $x_{n+1} - x_n \geq 0$, такође имамо

$$(b) \quad \lambda_{n+1}(x_{n+1} - x_n) \leq \mu_{n+1}(x_{n+1} - x_n).$$

Сабирајући неједнакости (a) и (b), добијамо

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1} \leq \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n+1} x_{n+1},$$

а то је и требало доказати. ■

Примедба 1. Анализирајте доказ и приметите да кад је $x_1, x_2, \dots, x_n$ стриктно растући, а бар на једном месту у условима који дефинишу релацију $A' \succ M'$ јавља се стриктна неједнакост, тада се и у неједнакости из ове теореме јавља знак стриктне неједнакости.

Примедба 2. Приметимо да кад се доказана неједнакост подели са

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n = s > 0,$$

тада она заиста има смисао поређења конвексних комбинација.

Вежимо за доказану неједнакост неке примере.

Већ знамо да ако су a, b позитивни да је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (вид. 4.1, неједнакост $x + \frac{p}{x} \geq 2\sqrt{p}$, где је $x = \frac{a}{b}$, $p = 1$). Ова једноставна неједнакост има своју следећу генерализацију.

Нека је $x_1, x_2, \dots, x_n$ низ позитивних бројева, а $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}$ његова произвољна пермутација. Тада важи неједнакост

$$\frac{x_{\alpha_1}}{x_1} + \frac{x_{\alpha_2}}{x_2} + \cdots + \frac{x_{\alpha_n}}{x_n} \geq n.$$

Можемо претпоставити $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Тада је $A = (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \succ M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, док је $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ опадајући низ. Примењујући теорему из претходног параграфа, имамо

$$x_{\alpha_1} \cdot \frac{1}{x_1} + x_{\alpha_2} \cdot \frac{1}{x_2} + \cdots + x_{\alpha_n} \cdot \frac{1}{x_n} \geq x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + x_2 \cdot \frac{1}{x_2} + \cdots + x_n \cdot \frac{1}{x_n} = n.$$

Напоменимо да пермутујући збир на десној страни наведене неједнакости, добијамо

$$\frac{x_1}{x_{\beta_1}} + \frac{x_2}{x_{\beta_2}} + \cdots + \frac{x_n}{x_{\beta_n}} \geq n,$$

где је $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}$ такође произвољна пермутација низа $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ова неједнакост се често налази у збиркама задатака и може се, ослањањем на однос аритметичке и геометријске средине и овако извести

$$\frac{x_{\alpha_1}}{x_1} + \cdots + \frac{x_{\alpha_n}}{x_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{x_{\alpha_1}}{x_1} \cdots \frac{x_{\alpha_n}}{x_n}} = n.$$

Али то није случај и са овим неједнакостима

$$(15) \quad x_{\alpha_1}x_n + x_{\alpha_2}x_{n-1} + \cdots + x_{\alpha_n}x_1 \geq x_1x_n + x_2x_{n-1} + \cdots + x_nx_1,$$

где смо узели за горње низове A и M , опадајући низ $x_n \geq x_{n-1} \geq \cdots \geq x_1$.

Или још директније имамо неједнакост

$$(16) \quad x_{\alpha_1}x_1 + x_{\alpha_2}x_2 + \cdots + x_{\alpha_n}x_n \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

са истим A и M и са растућим низом $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Из неједнакости (15) и (16) изводимо следећи закључак: За низ позитивних бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ и његову произвољну пермутацију $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}$, биће

$$\begin{aligned} x_{\underline{\alpha}_1} \cdot x_{\underline{\alpha}_n} + x_{\underline{\alpha}_2} \cdot x_{\underline{\alpha}_{n-1}} + \cdots + x_{\underline{\alpha}_n} \cdot x_{\underline{\alpha}_1} &\leq x_1 \cdot x_{\alpha_1} + x_2 \cdot x_{\alpha_2} + \cdots + x_n \cdot x_{\alpha_n} \\ &\leq x_{\underline{\alpha}_1}^2 + x_{\underline{\alpha}_2}^2 + \cdots + x_{\underline{\alpha}_n}^2, \end{aligned}$$

где је $x_{\underline{\alpha}_1} \geq x_{\underline{\alpha}_2} \geq \cdots \geq x_{\underline{\alpha}_n}$, а $x_{\overline{\alpha}_1} \leq x_{\overline{\alpha}_2} \leq \cdots \leq x_{\overline{\alpha}_n}$, тј. то су пермутације при којим дати низ постаје опадајући, одн. растући.

8. Рад у разреду. Аутор овог чланка предавао је Анализу у једном од одељења IV разреда Математичке гимназије у Београду, у току три задње године. Дobar део овог чланка изложен је ученицима ових одељења и они су те садржаје пратили са повишеним интересовањем. Навешћемо неке примере који су били на писменим вежбама или су у другим формама рађени у разреду, али задржаћемо се детаљније само на оном што нас везује за неједнакости.

1. (а) Скицирати график функције $y = x^2 e^{-x}$.

(б) За произвољне бројеве $a, b \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, доказати неједнакост

$$a^2 e^{\frac{b-a}{2}} + b^2 e^{\frac{a-b}{2}} \leq \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Решење. (а) Између осталог, нађе се да је ова функција конкавна на $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, (а на сваком од два комплементарна интервала је конвексна).

(б) За $a, b \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, према основној неједнакости ($\alpha = 1/2$), биће

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 e^{-\frac{a+b}{2}} \geq \frac{1}{2}a^2 e^{-a} + \frac{1}{2}b^2 e^{-b}.$$

Множећи са $2e^{\frac{a+b}{2}}$, добијамо тражену неједнакост.

2. (а) Скицирати график функције $y = x \ln x$.

(б) Доказати неједнакост

$$\ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n}{x_1 + \cdots + x_n},$$

где су $x_1, \dots, x_n$ позитивни бројеви.

(в) Ако је још $x_1 + \cdots + x_n = n$, тада је $x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n} \geq 1$.

Решење. (а) Дата функција је дефинисана на $(0, +\infty)$ и конвексна.

(б) Уопштена неједнакост (са $\alpha_i = \frac{1}{n}$), биће

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ln \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \leq \frac{x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n}{n}$$

што је, упрошћавањем, тражена неједнакост.

(в) Кад је $x_1 + \cdots + x_n = n$, из $x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n \geq 0$, следи $x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n} \geq 1$.

Приметимо да у случају опште конвексне комбинације, биће

$$(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 x_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \ln x_n.$$

Пишући $\lambda_i = \frac{\alpha_i x_i}{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}$, имаћемо антилогаритмујући

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

Комбинујући са неједнакошћу (11), налазимо

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

3. Ако су $x_1, \dots, x_n$ позитивни бројеви, тада је

$$(x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

(домаћи задатак).

Решење. Функција $f(x) = \frac{1}{x}$ је конвексна на $(0, +\infty)$. Зато, са $\alpha_i = \frac{1}{n}$, имаћемо

$$\frac{1}{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_n},$$

одакле

$$(x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Приметимо да у случају опште конвексне комбинације, добијамо

$$(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \left(\alpha_1 \cdot \frac{1}{x_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \frac{1}{x_n} \right) \geq 1.$$

4. Следеће примере саставили су поједини ученици. При томе имали смо следећи критериум: неједнакост мора бити лепа (што је распрострањени естетски осећај за симетрију израза који фигуришу, односно правилност по којој се формирају) и не сме бити сувише једноставна за доказивање (а што значи да неће се доказ сводити на неке једноставне мајоризације и сл.).

4.1. Нека је $\alpha \geq 1$. Тада важе неједнакости

$$(I) \quad 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha \geq n \left(\frac{n+1}{2} \right)^\alpha$$

$$(II) \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq n^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{Ана}).$$

Решење. За $\alpha \geq 1$, функција $f(x) = x^\alpha$ је конвексна.

(I) Узимајући $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \alpha_i = \frac{1}{n}$, имамо

$$\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n} \geq \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n} \right)^\alpha = \left(\frac{n+1}{2} \right)^\alpha,$$

па је

$$1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha \geq n \left(\frac{n+1}{2} \right)^\alpha.$$

(II) Узимајући $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, \alpha_i = \frac{1}{n}$, имамо

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) \geq \left[\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right]^\alpha,$$

па је

$$n^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^\alpha,$$

односно

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq n^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Кад је $\alpha = 2$, из

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \end{aligned}$$

добитимо

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}.$$

4.2. Нека су $x_1, \dots, x_n$ позитивни бројеви, а γ и t произвољни реални бројеви. Тада важи неједнакост

$$(x_1^\gamma + \dots + x_n^\gamma)^2 \leq (x_1^{\gamma+t} + \dots + x_n^{\gamma+t})(x_1^{\gamma-t} + \dots + x_n^{\gamma-t}) \quad (\text{Игор}).$$

Решење. Из неједнакости $u + \frac{1}{u} \geq 2$, узимајући $u = x_i^t x_j^{-t}$, имамо

$$x_i^t x_j^{-t} + x_j^t x_i^{-t} \geq 2.$$

Множећи са $x_i^\gamma x_j^\gamma$, следи

$$x_i^{\gamma+t} x_j^{\gamma-t} + x_j^{\gamma+t} x_i^{\gamma-t} \geq 2x_i^\gamma x_j^\gamma = x_i^\gamma x_j^\gamma + x_j^\gamma x_i^\gamma$$

$$(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Сабирањем свих тих неједнакости, добијамо

$$(x_1^{\gamma+t} + \dots + x_n^{\gamma+t})(x_1^{\gamma-t} + \dots + x_n^{\gamma-t}) \geq (x_1^\gamma + \dots + x_n^\gamma)^2.$$

4.3. При извођењу неједнакости (13) и (14) (параграф 6), Срђан је запитао да ли важи неједнакост

$$\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \dots + \sqrt{x_n x_1} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} + \sqrt[3]{x_2 x_3 x_4} + \dots + \sqrt[3]{x_n x_1 x_2} ?$$

Решење. Проверавамо кад је $n = 3$. Тада

$$\frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \sqrt{x_3 x_1}}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_2 x_3} \cdot \sqrt{x_3 x_1}} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3},$$

па тада ова неједнакост важи. Покушавамо у општем случају да такође применимо неједнакост (12), па добијамо

$$\frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \dots + \sqrt{x_n x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_2 x_3} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n x_1}}$$

$$= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

и комбинујући са (13), имамо неједнакости

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \dots + \sqrt{x_n x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

а што је рафинирање односа аритметичке и геометријске средине. Оставили смо ово питање за домаћи рад, па на следећем часу, кад је $n = 4$, узели смо

$$x_1 = t^{18}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = t^{12}, \quad x_4 = t^6, \quad (t > 0).$$

Тада се неједнакост своди на $2t \geq t^2 + 1$, а та релација није тачна чим је $t \neq 1$.

Наведимо пример неједнакости коју можемо сматрати лепом али и сувише једноставном.

Ако је $0 \leq a \leq b \leq c$, тада важи неједнакост $\sqrt{ab} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{bc}$, па ако је $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, биће

$$\sqrt{x_1 x_2} + \dots + \sqrt{x_{n-2} x_{n-1}} \leq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} + \dots + \sqrt[3]{x_{n-2} x_{n-1} x_n}$$

$$\leq \sqrt{x_2 x_3} + \dots + \sqrt{x_{n-1} x_n}.$$

5. (а) Скицирати график функције $f(x) = \ln(x^p - 1)$, $p > 1$.
 (б) Доказати да за позитивне бројеве $u_1, \dots, u_n$ важи неједнакост

$$\sqrt[n]{u_1 \cdots u_n} \leq \left[\frac{(u_1 + 1)^{1/p} + \cdots + (u_n + 1)^{1/p}}{n} \right]^p - 1.$$

Решење. (а) Функција f је дефинисана на $(1, +\infty)$ и из

$$f''(x) = -\frac{x^p + p - 1}{(x^p - 1)^2} p x^{p-1} < 0,$$

следи да је конкавна.

- (б) Општа неједнакост за функцију f , са $\alpha_i = \frac{1}{n}$, је

$$\begin{aligned} \ln \left[\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) - 1 \right] &\geq \frac{\ln(x_1^p - 1) + \cdots + \ln(x_n^p - 1)}{n} \\ &\geq \ln \sqrt[n]{(x_1^p - 1) \cdots (x_n^p - 1)}. \end{aligned}$$

Тако имамо

$$\sqrt[n]{(x_1^p - 1) \cdots (x_n^p - 1)} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p - 1.$$

Узимајући $x_1^p - 1 = u_1, \dots, x_n^p - 1 = u_n$ (и пошто $x \in (1, +\infty)$, то $u = x^p - 1 \in (0, +\infty)$), добијамо

$$\sqrt[n]{u_1 \cdots u_n} \leq \left[\frac{(u_1 + 1)^{1/p} + \cdots + (u_n + 1)^{1/p}}{n} \right]^p - 1.$$

- (в) Приметимо да из

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{(u_1 + 1)^{1/p} + \cdots + (u_n + 1)^{1/p}}{n} \right]^p = \sqrt[n]{(u_1 + 1) \cdots (u_n + 1)},$$

налазимо да је

$$\sqrt[n]{u_1 \cdots u_n} \leq \sqrt[n]{(u_1 + 1) \cdots (u_n + 1)} - 1.$$

Узимајући $u_i = i$, ($i = 1, \dots, n$), имамо

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{n+1} - 1,$$

одакле следи

$$n! > \frac{1}{(\sqrt[n]{n+1} - 1)^n}.$$

Добијена неједнакост је профићење познате неједнакости $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$. Наиме, може се показати да, почев од неког n , важи $\frac{1}{\sqrt[n]{n+1} - 1} > \sqrt{n}$.

Из опште неједнакости, без спецификација вредности за α_i , имамо

$$(x_1^p - 1)^{\alpha_1} \cdots (x_n^p - 1)^{\alpha_n} \leq (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^p - 1,$$

па опет смењом $u_i = x_i^p - 1$, добијамо

$$u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n} \leq [\alpha_1(u_1 + 1)^{1/p} + \cdots + \alpha_n(u_n + 1)^{1/p}]^p - 1.$$

Применимо на збир производа у загради Hölder-ову неједнакост, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, па ћемо добити

$$u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n} \leq (\alpha_1^q + \cdots + \alpha_n^q)^{p/q} (u_1 + \cdots + u_n + n) - 1.$$

Да ова неједнакост, и поред примњене мајоризације на израз у загради, није груба види се да кад у њој узмемо $\alpha_i = \frac{1}{n}$, добићемо опет неједнакост о односу аритметичке и геометријске средине.

Кад је $p = q = 2$, имамо неједнакост

$$u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n} \leq (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)(u_1 + \cdots + u_n + n) - 1.$$

Претпоставимо: $(\forall i) \alpha_i > 0$. Тада је

$$\lim_{q \rightarrow 1} (\alpha_1^q + \cdots + \alpha_n^q)^{p/q} = \lim_{q \rightarrow 1} (\alpha_1^q + \cdots + \alpha_n^q)^{\frac{1}{q-1}} = \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}.$$

Тако имамо и следећу неједнакост

$$u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n} (u_1 + \cdots + u_n + n) - 1.$$

6. (а) Скицирати график функције $f(x) = \ln(x^p + 1)$, $p > 1$.

(б) Доказати да за бројеве $x_i \in [0, (p-1)^{1/p}]$, $i = 1, \dots, n$ важи неједнакост

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p \leq \sqrt[p]{(1 + x_1^p) \cdots (1 + x_n^p)} - 1.$$

Решење. (а) Функција f је дефинисана на $[0, +\infty)$. Њен други извод је $f''(x) = \frac{px^{p-2}}{(1+x^p)^2} (p-1-x^p)$, па је f конвексна на $[0, (p-1)^{1/p}]$, а на $[(p-1)^{1/p}, +\infty)$ конкавна.

(б) Узимајући $\alpha_i = \frac{1}{n}$, за $x_i \in (0, (p-1)^{1/p}]$, имаћемо

$$\ln \left[\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p + 1 \right] \leq \frac{\ln(x_1^p + 1) + \cdots + \ln(x_n^p + 1)}{n}.$$

Одатле

$$(\alpha) \quad \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p + 1 \leq \sqrt[p]{(x_1^p + 1) \cdots (x_n^p + 1)}.$$

(в) Наравно, за $x_i \in [(p-1)^{1/p}, +\infty)$ биће

$$(\beta) \quad \sqrt[p]{(x_1^p + 1) \cdots (x_n^p + 1)} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p + 1.$$

Примењујући неједнакост (12), на израз на десној страни, имамо

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p + 1 \geq \sqrt[p]{x_1^p \cdots x_n^p} + 1,$$

па видимо да је неједнакост (β) од ње финија.

Сменом $x_i^p + 1 = u_i$, имамо

$$(\alpha') \quad \left[\frac{(u_1 - 1)^{1/p} + \dots + (u_n - 1)^{1/p}}{n} \right]^p + 1 \leq \sqrt[n]{u_1 \dots u_n},$$

са $1 \leq u_i \leq p$, а у другом случају

$$(\beta') \quad \left[\frac{(u_1 - 1)^{1/p} + \dots + (u_n - 1)^{1/p}}{n} \right]^p + 1 \geq \sqrt[n]{u_1 \dots u_n},$$

са $u_i \geq p$.

Примећујемо да је за једно подручје вредности променљивих $u_1, \dots, u_n$, исти израз миноранта а за друго мајоранта изразу $\sqrt[n]{u_1 \dots u_n}$.

Сличне ситуације настају кад посматрате збир конвексне и конкавне функције. На пример, узмите $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $f(x) = x \ln x + \ln x$ итд.

Примери под 5. и 6. су са писменог испита, дати по групама. За разраду, први изгледа занимљивије од другог, али нема начелног правила како то можемо унапред одредити. Уместо тога, кад год испитујете неку функцију и скицирате њен график, пробајте да направите и неку занимљиву неједнакост. Нека то буде и крај овог нашег излагања.

ОБАВЕШТЕЊЕ

У организацији Министарства просвете Републике Српске Крајине, Универзитета „Никола Тесла“ у Книну и Српског друштва математичара „Радивој Кашанић“ из Белог Манастира, у Книну је 7. и 8. априла 1995. године одржан Семинар за професоре математике средњих школа РСК. Семинару је присуствовало 45 професора математике из западног дела РСК.

Семинар је отворио др Раде Таџга, ректор Универзитета „Никола Тесла“ у Книну, а пријем за учеснике и госте приредио је Рајко Лежајић, председник Скупштине РСК. Слободно време учесници и гости су искористили за разгледање Книна и његове околине.

У оквиру семинара одржана су следећа предавања:

1. др Славиша Прешић, проф. унив. (Београд): *Математичка логика у настави математике*;
2. др Светозар Милић, проф. унив. (Нови Сад): *О немарности примена дефиниција у настави математике*;
3. Војислав Андрић, проф. (Ваљево): *Решавање проблема методом разликовања случајева*;
4. Богољуб Маринковић, проф. (Београд): *Проблеми екстремних вредности (елементарне методе)*;
5. Милан Шарић, школски надзорник (Бели Манастир): *Метод површина*;
6. др Милосав Марјановић, проф. унив. (Београд): *Решавање ирационалних неједначина*;
7. др Мирослав Петровић, проф. унив. (Крагујевац): *Комплексни бројеви у средњошколској настави*;
8. др Миодраг Рашковић, проф. унив. (Крагујевац): *Како помоћи ученицима да схвате појам непрекидности*;
9. Богољуб Маринковић, проф. (Београд): *Графови и многоуглови (неке примене Ојлерове формуле)*.

М. Ш.