

Др Дражен Пантћ

ТЕОРИЈА МАРТИНГАЛА И ПРИМЕНЕ У АНАЛИЗИ

Теорија мартингала и Дооб-ва теорема о скоро извесној конвергенцији представљају један од најважнијих концепата теорије вероватноће. Јасноћа и дубина идеја инволвираних у теорији мартингала није остала без одјека и у другим математичким областима, па су тако многе важне теореме математичке анализе, нарочито у оквиру теорије мере и хармонијске анализе, снабдеване новим, алтернативним доказима заснованим на Дооб-овој теорему. Релативна једноставност доказа, који не захтева математички апарат ван нивоа студентског знања, даје могућност да се теорија мартингала уврсти у програм редовних или специјалних курсева у оквиру студија математике, што би студентима, нарочито даровитијим, отворило шири и дубљи увид у поједина поглавља како теорије вероватноће тако и математичке анализе.

Прелиминарије

У даљем ћемо претпостављати да је дат фиксиран вероватносни простор $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$, где је Ω непразан скуп, $\mathcal{F}$ σ -алгебра на Ω , и $\mathbb{P}$ вероватносна мера на $\mathcal{F}$.

Поток σ -алгебри. Фамилија σ -алгебри $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, ($I \subset \mathbb{R}_+$), на вероватносном простору $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ се назива *поток* ако је фамилија монотонно неопадajuћа и непрекидна здесна у смислу да је $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ и ако су све σ -алгебре комплетне у односу на меру $\mathbb{P}$.

Адаптирани процес. Случајни процес $\{X_t, t \in I\}$ на $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ је *адаптиран потоку* $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ако је за свако t случајна променљива X_t мерљива у односу на $\mathcal{F}_t$.

Условно математичко очекивање. Нека је на $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ дата σ -алгебра $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, и нека је X произвољна интеграбилна случајна променљива. *Условно математичко очекивање случајне променљиве X у односу на σ -алгебру $\mathcal{A}$* је случајна променљива $\mathbb{E}\{X|\mathcal{A}\}$, мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{A}$, таква да за сваки скуп $A \in \mathcal{A}$ важи

$$(1) \quad \int_A X \mathbb{P}\{d\omega\} = \int_A \mathbb{E}\{X|\mathcal{A}\} \mathbb{P}\{d\omega\}.$$

Егзистенција и јединственост случајне величине $\mathbb{E}\{X|\mathcal{A}\}$ непосредно следује из теореме Radon-Nykodim-a. Наиме за $A \in \mathcal{A}$ функција скупа

$$\int_A X(\omega) \mathbb{P}\{d\omega\}$$

је апсолутно непрекидна у односу на сужење мере $\mathbb{P}$ на $\mathcal{A}$, па постоји тачно једна $\mathcal{A}$ -мерљива функција $\mathbb{E}\{X|\mathcal{A}\}$, тако да (1) важи.

ПРИМЕР 1. На простору вероватноћа $\langle [0, 1], \mathcal{F}, \lambda \rangle$ дефинишимо

$$\mathcal{F}_n = \sigma \left\{ \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) : 1 \leq k \leq 2^n \right\}.$$

Ако је $f \in L_1$ тада је

$$\mathbb{E}\{f | \mathcal{F}_n\}(\omega) = \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} f(x) dx \mathbb{I}\{(k-1)/2^n \leq \omega < k/2^n\}.$$

Случајна времена. Случајна променљива τ са вредностима у скупу I се назива *случајно време* ако за свако $t \in I$ скуп $\{\tau \leq t\} = \{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$ припада σ -алгебри $\mathcal{F}_t$.

σ -алгебра генерисана случајним временом. *Фамилија скупова*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : (\forall t)(A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t)\}$$

је канонична σ -алгебра генерисана случајним временом τ . Ако је η случајно време, тако да је $\eta \leq \tau$ тада је $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\tau$.

Доказ. Очигледно је да је $\mathcal{F}_\tau$ затворена у односу на пребројиве уније и комплементирање. Наиме, ако су $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ тада је

$$\bigcup_n A_n \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_n (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Такође, ако је $A \in \mathcal{F}_t$ тада је $A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} - A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Са друге стране, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_\tau$, тј. τ је $\mathcal{F}_\tau$ мерљива случајна променљива.

Како је $\eta \leq \tau$ то је $\{\tau \leq t\} \subset \{\eta \leq t\}$. Тада, за $A \in \mathcal{F}_\eta$ имамо

$$A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\eta \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

одакле следује да је $A \in \mathcal{F}_\tau$. ■

Случајно време је *предвидиво* ако:

- $\{\tau \leq t_k\} \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$ у дискретном случају;
- $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t_-}$ у непрекидном случају.

НАПОМЕНА. Ако је I коначан или пребројив дискретан скуп облика $I = \{t_k, k \in K\}$ тада је за свако t_k

$$\{\tau = t_k\} = \{\tau \leq t_k\} - \{\tau \leq t_{k-1}\} \in \mathcal{F}_{t_k}.$$

Мартингали и њихове особине

Мартингал. Адаптирани случајни процес $\{X_t, t \in I\}$ је L_p -мартингал у односу на поток $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ако је за свако t , $X_t \in L_p$ и за свако $0 < s < t \in I$ важи $\mathbb{E}\{X_t \mid \mathcal{F}_s\} = X_s$.

ПРИМЕР 2. Ако је X интеграбилна случајна променљива, тада је процес $X_t = \mathbb{E}\{X \mid \mathcal{F}_t\}$ мартингал. Наиме, за $0 < s < t \in I$ имамо

$$\mathbb{E}\{X_t \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{F}_s\} \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{X \mid \mathcal{F}_s\} = X_s.$$

Предвидив процес. Процес $\{V_t, t \in I\}$ је *предвидив* ако је $V_{t_0} \in \mathcal{F}_{t_0}$ и:

- $V_{t_k} \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$ у дискретном случају;
- $V_t \in \mathcal{F}_{t-} = \bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s$ у непрекидном случају.

У даљем ћемо без ограничавања општости третирати само дискретан случај, када је индексни скуп I облика $\{t_k : k \in \mathbb{K}\}$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$.

ЛЕМА А. Ако је $\{V_t, t \in I\}$ предвидив процес и $\{X_t, t \in I\}$ мартингал, тада је процес $\{(V \cdot X)_t\}$, дефинисан као

$$(V \cdot X)_{t_k} = V_{t_0} X_{t_0} + V_{t_1} (X_{t_1} - X_{t_0}) + \cdots + V_{t_k} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}),$$

такође мартингал.

Доказ. Нека је $t_i \leq t_{p-1} < t_p$. Тада је $\mathcal{F}_{t_{p-1}} \subset \mathcal{F}_{t_i}$, па је

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V_{t_p} (X_{t_p} - X_{t_{p-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{V_{t_p} (X_{t_p} - X_{t_{p-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\} \mid \mathcal{F}_{t_i}\} \\ &= \mathbb{E}\{V_{t_p} \mathbb{E}\{(X_{t_p} - X_{t_{p-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{p-1}}\} \mid \mathcal{F}_{t_i}\} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ЛЕМА В. Нека је T случајно време, које узима коначно много вредности $t_0 < t_1 < \cdots < t_p$. Тада је процес $\{V_{t_k}\}$, дефинисан као $V_{t_k} = \mathbb{I}\{t_k \leq T\}$, предвидив процес, а $\{X_{t_k \wedge T}\}$ је мартингал.

Доказ. За $k > 0$ имамо

$$\{V_{t_k} = 0\} = \{T < t_k\} = \{T \leq t_{k-1}\} \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$$

а за $k = 0$, $\{V_{t_k} = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_{t_0}$. Такође,

$$(V \cdot X)_{t_k} = X_{t_0} + \cdots + (X_{t_k \wedge T} - X_{t_{k-1} \wedge T}) = X_{t_k \wedge T},$$

одакле, на основу Леме А следује да је $\{X_{t_k \wedge T}\}$ мартингал. $\blacksquare$

ЛЕМА С. Нека су T и S случајна времена, са коначно много вредности $t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, тако да је скоро сигурно $S \leq T$. Тада је

$$\mathbb{E}\{X_T \mid \mathcal{F}_S\} = X_S.$$

Доказ. Како је

$$|X_S| \leq |X_{t_0}| + \cdots + |X_{t_p}|,$$

то је X_S интеграбилна случајна променљива. За $A \in \mathcal{F}_S$ следује да је $A \cap \{S = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$, па имамо

$$\int_{A \cap \{S=t_i\}} (X_{t_p} - X_S) dP = \int_{A \cap \{S=t_i\}} (X_{t_p} - X_{t_i}) dP = 0,$$

па је

$$\int_A (X_{t_p} - X_S) dP = \sum_{i=1}^p \int_{A \cap \{S=t_i\}} (X_{t_p} - X_S) dP = 0,$$

одакле следује да је $\mathbb{E}\{X_{t_p} \mid X_S\} = X_S$. Ако већ доказано применимо на мартингал $X_{t \wedge T}$ добијамо

$$\mathbb{E}\{X_T \mid \mathcal{F}_S\} = \mathbb{E}\{X_{T \wedge t_p} \mid \mathcal{F}_S\} = X_{T \wedge S} = X_S. \quad \blacksquare$$

Теорема о прескакању интервала. Нека је $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ мартингал, у односу на поток $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$, тако да је $\sup_k \mathbb{E}\{|X_k|\} < \infty$. Ако је, за $a < b$, M_a^b број прелазака одоздо на горе интервала $[a, b]$ мартингала X , тада је

$$\mathbb{E}\{M_a^b\} \leq \frac{1}{b-a} \sup_k \mathbb{E}\{(a - X_k)^+\}.$$

Доказ. Разматраћемо случај када је мартингал заустављен на k -том члану, тј. када за $i > k$ имамо $X_i = X_k$, а закључак ћемо онда спровести пуштајући $k \rightarrow \infty$.

Приметимо најпре следећу чињеницу: ако су S и T два случајна времена $S \leq T$, са вредностима у коначном скупу, и ако је $A \in \mathcal{F}_S$, а B мерљиви подскуп скупа A , тада је, на основу Леме C,

$$0 = \int_A (X_T - X_S) dP = \int_{A-B} (X_T - X_S) dP + \int_B (X_T - X_S) dP,$$

одакле следује да је

$$\int_B (X_T - X_S) dP = \int_{A-B} (X_S - X_T) dP.$$

Дефинишимо сада случајна времена:

$$S_1 = \inf\{i : X_i \leq a\} \wedge k + 1, \quad T_1 = \inf\{i > S_1 : X_i \geq b\} \wedge k + 1$$

$$S_{n+1} = \inf\{i > T_n : X_i \leq a\} \wedge k + 1, \quad T_{n+1} = \inf\{i > S_{n+1} : X_i \geq b\} \wedge k + 1,$$

као и скупове

$$A_i = \{S_i < k + 1\} \in \mathcal{F}_{S_i} \subset \mathcal{F}_k$$

$$B_i = \{T_i < k + 1\} \subset A_i \subset B_{i+1}. \quad (\{T_i < k + 1\} = \mathbb{P}\{M_a^b \geq i\}!)$$

Тада имамо

$$\begin{aligned} (b-a)\mathbb{P}\{B_i\} &\leq \int_{B_i} (X_{T_i} - X_{S_i}) dP = \int_{A_i-B_i} (X_{S_i} - X_{T_i}) dP \\ &\leq \int_{A_i-B_i} (a - X_{k+1}) dP = \int_{A_i-B_i} (a - X_k) dP \leq \int_{A_i-B_i} (a - X_k)^+ dP, \end{aligned}$$

пошто је $X_{S_i} \leq a$ на A_i , а на B_i^c је $X_{T_i} = X_{k+1} = X_k$. Како су $A_i - B_i$ међусобно дисјунктни скупови, то сумирајући сада по i од 1 до k имамо

$$(b-a) \sum_{i=1}^k \mathbb{P}\{B_i\} \leq \sum_{i=1}^k \int_{A_i} (a - X_k)^+ dP \leq \mathbb{E}\{(a - X_k)^+\} \leq \sup_k \mathbb{E}\{(a - X_k)^+\},$$

па пуштајући $k \rightarrow \infty$ добијамо

$$(b-a) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{B_i\} = (b-a) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{M_a^b \geq i\} = (b-a) \mathbb{E}\{M_a^b\} \leq \sup_k \mathbb{E}\{(a - X_k)^+\}. \blacksquare$$

Сада смо у ситуацији да искажемо познату Дооб-ову теорему и да је докажемо као последицу претходних Лема.

Дооб-ова теорема. Нека је $\{X_{t_k} : k \in \mathbb{N}\}$ мартингал тако да је $\sup_k \mathbb{E}\{|X_{t_k}|\} < \infty$. Тада, скоро извесно постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n} = X$. Уколико је низ $\{X_{t_k} : k \in \mathbb{N}\}$ униформно интеграбилан тада је још и $X_{t_n} = \mathbb{E}\{X \mid \mathcal{F}_{t_n}\}$. $\blacksquare$

ПРИМЕР 3: Теорема Лебега о диференцирању. Ако је f интеграбилна функција на јединичном квадрату K у $\mathbb{R}^d$ и $\mathcal{F}_n$ низ σ -алгебри генерисаних дијадским интервалима дужине 2^{-n} у K , у примеру 1 смо видели да је тада, за $x \in Q_n$

$$f_n(x) = \mathbb{E}\{f \mid \mathcal{F}_n\}(x) = 2^{nd} \int_{Q_n} f(x) dx.$$

На основу Дооб-ове теореме следује да, са вероватноћом један, постоји гранична вредност $\lim_n f_n(x) = g(x)$. Али, за било које Q_n имамо даље

$$\int_{Q_n} g(x) dx = \lim_n \int_{Q_n} f_n(x) dx = \int_{Q_n} f(x) dx,$$

одакле следује да је $f(x) = g(x)$ скоро свуда.

ПРИМЕР 4. Нека је у јединичном кругу $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ дефинисан низ $\{X_n\}$ са:

- почетна вредност $X_0 = x \in K$,
- ако је дефинисан X_n тада је X_{n+1} независан од X_n и униформно расподељен у највећем кругу са центром у X_n који припада кругу K .

Тада је јасно да је X мартингал са униформно ограниченим очекивањима, па према Дооб-овој теорему, са вероватноћом један, постоји $\lim_n X_n = X$. Лако се може показати да је тада обавезно $X \in \partial K$.

Доказ теореме Radon-Nykodim-a

R-N теорема. Нека је t вероватносна, а q коначна мера на $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B} \rangle$ тако да је мера q апсолутно непрекидна у односу на t . Обележимо

$$A_k^n = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right), \quad \mathcal{F}_n = \sigma\{A_k^{(n)}, k \in \mathbb{Z}\} \text{ и } k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

$$G_n(x) = \sum_{k: m(A_k^n) > 0} \frac{q(A_k^n)}{m(A_k^n)} \mathbb{I}\{x \in A_k^n\}.$$

Тада имамо:

- (i) низ $G_n(x)$ је мартингал у односу на поток $\{\mathcal{F}_n\}$;
- (ii) постоји гранична вредност $\lim_n G_n(x) = G(x) \pmod{m}$;
- (iii) са свако $B \in \mathcal{B}$

$$q(B) = \int_B G(x) m(dx).$$

Доказ. (i) Јасно је да је $G_n(x)$ мерљива у односу на $\mathcal{F}_n$. Даље имамо да је $A_k^n = A_{2k}^{n+1} \cup A_{2k+1}^{n+1}$, па је

$$\begin{aligned} \int_{A_k^n} G_{n+1}(x) m(dx) &= \int_{A_{2k}^{n+1}} G_{n+1}(x) m(dx) + \int_{A_{2k+1}^{n+1}} G_{n+1}(x) m(dx) \\ &= \int_{A_{2k}^{n+1}} \frac{q(A_{2k}^{n+1})}{m(\int_{A_{2k}^{n+1}})} m(dx) + \int_{A_{2k+1}^{n+1}} \frac{q(A_{2k+1}^{n+1})}{m(\int_{A_{2k+1}^{n+1}})} m(dx) \\ &= q(A_{2k}^{n+1}) + q(A_{2k+1}^{n+1}) = q(A_k^n) = \int_{A_k^n} \frac{q(A_k^n)}{m(A_k^n)} m(dx) \\ &= \int_{A_k^n} G_n(x) m(dx) \end{aligned}$$

одакле следује да је $\mathbb{E}\{G_{n+1}(x) \mid \mathcal{F}_n\} = G_n(x)$, тј. $G_n(x)$ је мартингал.

(ii) Како је

$$\int_{\mathbb{R}} G_n(x) m(dx) = q(\mathbb{R}) < \infty$$

следује да је мартингал $G_n(x)$ униформно интеграбилан па је (ii) доказано.

(iii) За свако A_k^n је

$$\int_{A_k^n} G(x) m(dx) = \lim_l \int_{A_k^n} G_l(x) m(dx) = q(A_k^n). \quad \blacksquare$$

Calderon-Zigmund лема

Сада ћемо, користећи теорију мартингала, доказати следећу теорему:

Calderon-Zigmund лема. Нека је f позитивна, интеграбилна функција на јединичном квадрату K у $\mathbb{R}^d$ и нека је $a > 0$ произвољна константа. Тада се K може декомпоновати као:

- a) $K = F \cup Q$, $F \cap Q = \emptyset$,
- b) $f \leq a$ скоро свуда на F ,
- в) Q је унија дисјунктних интервала, $Q = \bigcup_n Q_n$ тако да за свако n

$$a < \frac{1}{\lambda(Q_n)} \int_{Q_n} f(x) dx \leq 2^d a.$$

Доказ. На простору вероватноћа $\langle K, \mathcal{F}, \lambda \rangle$ дефинишимо поток σ -алгебри $\mathcal{F}_n$, генерисаних диадичним интервалима дужине 2^{-n} . Нека је, као и раније

$$f_n = \mathbb{E}\{f \mid \mathcal{F}_n\}$$

и нека је T случајно време дефинисано као

$$T = \inf\{n : f_n > a\}.$$

Узмимо $F = \{T = +\infty\}$, а $Q = F^c$. Јасно је да је $Q = \{T < \infty\} = \bigcup_n \{T = n\}$, па како је $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ одатле следује да се Q може представити као унија дисјунктних диадских интервала. Ако је $T = n$ тада је $f_n > a$, али је $f_{n-1} \leq a$. Такође имамо да је $f_n/f_{n-1} \leq 2^n$, јер за $\omega \in Q_n \subset Q_{n-1}$ имамо

$$f_n(\omega) = \frac{1}{\lambda(Q_n)} \int_{Q_n} f(x) dx \leq \frac{\lambda(Q_{n-1})}{\lambda(Q_n)} \frac{1}{\lambda(Q_{n-1})} \int_{Q_{n-1}} f(x) dx = 2^d f_{n-1}(\omega),$$

одакле следује да је

$$a < \frac{1}{\lambda(Q_n)} \int_{Q_n} f(x) dx \leq 2^d a.$$

Са друге стране на скупу $F = \{T = \infty\}$ имамо за свако n $f_n \leq a$, па како је $f = \lim_n f_n$ скоро свуда, то је и $f \leq a$ скоро свуда на F . ■

Choquet-Deny теорема

Нека је m вероватносна мера на $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B} \rangle$. Мерљива функција f се назива *m-хармонијска* ако је

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+u) m(du), \quad \text{за свако } x.$$

Choquet-Deny теорема. *Ако је f непрекидна и ограничена m-хармонијска функција на $\mathbb{R}$ тада је свака тачка из носача мере m периода за функцију f .*

Доказ. Нека је, на неком $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$, $\{X_n\}$ низ независних случајних променљивих расподељених по закону m . Ако за $x \in \mathbb{R}$ дефинишемо

$$Y_n = f(x + X_1 + \cdots + X_n),$$

тада је $\{Y_n\}$ ограничени мартингал у односу на поток $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Наиме

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} &= \mathbb{E}\{f(x + X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x + X_1 + \cdots + X_n + u) m(du) \\ &= f(x + X_1 + \cdots + X_n) = Y_n \end{aligned}$$

На основу Doob-ове теореме даље следује да, са вероватноћом један, постоји $H_x = \lim_n Y_n$. Очигледно је да је H_x симетрична случајна променљива у односу

на низ $\{X_n\}$, тј. ако је α произвољна бијекција $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$ која оставља непомићним све, осим коначно много чланова, тада је такође

$$H_x = \lim_n f(x + X_{\alpha(1)} + \cdots + X_{\alpha(n)}).$$

За довољно велико n даље имамо да је

$$\mathbb{E}\{|H_x - f(x + X_1 + \cdots + X_n)|\} < \varepsilon,$$

али ако на низ $\{X_n\}$ применимо пермутацију која мења места члановима $X_1, \dots, X_n$ и $X_{n+1}, \dots, X_{2n}$, тада имамо

$$(2) \quad \mathbb{E}\{|H_x - f(x + X_{n+1} + \cdots + X_{2n})|\} < \varepsilon.$$

Са друге стране, ако је $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma\{X_k, k > n\}$, тада имамо

$$\mathbb{E}\{f(x + X_1 + \cdots + X_{2n}) \mid \bar{\mathcal{F}}_n\} = f(x + X_{n+1} + \cdots + X_{2n}),$$

па како је $\lim_n \bar{\mathcal{F}}_n$ тривијална алгебра, а $f(x + X_1 + \cdots + X_{2n}) \rightarrow H_x$, то имамо да је

$$(3) \quad \lim_n f(x + X_{n+1} + \cdots + X_{2n}) = \mathbb{E}\{H_x\} = f(x).$$

Из релација (2) и (3) следује да је H_x са вероватноћом један константа, тј. $H_x = \mathbb{E}\{H_x\} = f(x)$, одакле даље имамо

$$f(x + X_1) = \mathbb{E}\{H_x \mid \mathcal{F}_1\} = f(x)$$

са вероватноћом један, па је онда функција $f(x + v)$ скоро свуда константа, по v . Како је f непрекидна одакле даље следује да је свака тачка v носача мере m периода за f . ■

ЛИТЕРАТУРА

- [1.] R. J. Elliot: *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982
- [2.] K. L Chung, R. J. Williams: *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser, 1983
- [3.] C. Dellacherie, P. A. Meyer: *Probabilities and Potential*
- [4.] R. Sh. Liptser, A. N. Shiryaev: *Martingale theory*
- [5.] J. L. Doob: *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*.