

Др Павле Младеновић

ИНВАРИЈАНТА

Често се у средњошколској математици срећу задаци чија формулација има следећи општи вид:

Дата је нека комбинаторна конфигурација (скуп, низ са одређеним својствима, таблица попуњена бројевима, ...). Дозвољено је трансформисати ту комбинаторну конфигурацију применом неке операције. Поставља се питање да ли се од полазне конфигурације може добити нека друга конфигурација, експлицитно одређена или са задатим својствима.

Наравно, одговор на постављено питање може бити потврдан или одречан. Ако је одговор потврдан, онда се он може дати, на пример, тако што се наведе алгоритам (поступак) који ефективно омогућава да се од полазне комбинаторне конфигурације добије жељена. Ако такав поступак не постоји, онда то треба и доказати. Овде ћемо на неколико примера показати један начин доказивања тврђења овог облика.

1. Нека је на табли знак плус записан 20 пута, а знак минус 25 пута. Дозвољено је обрисати два знака и уместо њих записати знак плус, ако су избрисани знаци једнаки, а записати знак минус, ако су избрисани знаци различити. Ова операција се понавља све док на табли остане записан само један знак. Који је то знак?

Навешћемо три решења овог задатка.

Решење 1. Приметимо да се после сваке операције (брисање два знака и записивање једног) број знакова минус који су записани на табли смањује за два (ако су обрисана два знака минус и записан један знак плус) или остаје исти (ако су обрисана два знака плус и записан један плус, или обрисан један плус и један минус и записан један минус). Пошто је на почетку на табли било 25 (непаран број) знакова минус, то и на крају на табли остаје непаран број знакова минус. Дакле, када на табли остане записан само један знак, онда је то знак минус (независно од начина брисања и записивања знакова).

Решење 2. Сваки знак плус заменимо бројем 1, а сваки знак минус заменимо бројем -1 и претпоставимо да се операција брисања и записивања бројева врши у складу са наведеним условом. Дакле, ако се избришу два једнака броја, записује се број 1, а ако се избришу два различита броја, онда се записује број -1 . Лако

се примећује да после сваког корака (брисање два и записивање једног броја) производ свих бројева записаних на табли остаје непромењен. На почетку је тај производ једнак $1^{20} \cdot (-1)^{25} = -1$, па следи да је он једнак -1 и на крају. Према томе, када на табли остане само један број (знак), онда је то број -1 (знак минус).

Решење 3. Сваки знак плус заменимо бројем 0, а сваки знак минус бројем 1. Сада можемо приметити да збир обрисаних бројева има исту парност као и записани број. Према томе, збир свих записаних бројева не мења парност после примене описане операције. На почетку је тај збир био једнак 25, дакле непаран број, па и на крају мора бити непаран. Према томе, када на табли остане само један број, он мора бити непаран, дакле једнак 1. У терминима знакова, на табли је остао записан знак минус.

Приметимо да смо у сваком од ових решења уочили неку карактеристику комбинаторне конфигурације која се не мења применом дозвољене операције. Таква карактеристика назива се *инваријанта*. У првом решењу инваријанта је била *парност броја знакова минус* који су записани на табли, у другом решењу инваријанта је била *производ бројева записаних на табли*, а у трећем решењу инваријанта је била *парност збира свих записаних бројева*.

2. Бак првак је узео један лист папира и разрезао га на 10 мањих листова. Један од тих делова разрезао је поново на 10 мањих листова и поновио је ову операцију неколико пута. На крају је избројао колико има листова и добио број 123. Доказати да је погрешно у бројању.

Решење. После сваке примене наведене операције (резање једног листа на 10 мањих) укупан број листова повећава се за 9. Према томе, после сваке операције број листова при дељењу са 9 даје исти остатак као и на почетку. Како је на почетку тај остатак једна 1, то је он једнак 1 и на крају. Следи да број добијених листова не може бити једнак 123, јер број 123 при дељењу са 9 даје остатак 6.

3. Круг је подељен на 10 сектора и у сваком од њих је постављен један жетон. Дозвољено је у једном кораку преместити два жетона, али тако да се сваки од њих премешта на суседно поље и да се та два жетона при премештању крећу у супротном смеру. Да ли се понављањем ове операције сви жетони могу преместити на једно поље?

Решење. Нека су сектори нумерисани бројевима 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 редом у изабраном смеру. Сваком жетону придружимо број поља на коме се налази тај жетон и размотримо како се применом наведене операције мења остатак који при дељењу са 10 даје збир бројева придружених свим жетонима. Размотримо следеће случајеве:

(а) Изводи се операције код које се не премешта жетон са поља 9 на поље 0 нити жетон са поља 0 на поље 9. Тада се премешта жетон са поља k на поље $k+1$ и са поља l на поље $l-1$, где је $0 \leq k \leq 8$ и $1 \leq l \leq 9$. У овом случају збир

бројева придружених жетонима исти је и пре и после изведене операције, па се и остатак при дељењу са 10 тог збира не мења.

(б) Један жетон се премешта са поља 9 на поље 0, а други са поља l на поље $l - 1$, где је $1 \leq l \leq 9$. Збир бројева придружених жетонима се сада смањује за 10, а остатак при дељењу тог збира са 10 остаје исти.

(в) Један жетон се премешта са поља 0 на поље 9, а други са поља k на поље $k + 1$, где је $0 \leq k \leq 8$. Збир бројева придружених жетонима се у овом случају повећава за 10, а остатак при дељењу тог збира са 10 остаје исти.

(г) Један жетон се са поља 0 премешта на поље 9, а други са поља 9 на поље 0. Збир бројева придружених жетонима не мења се, па следи да се не мења ни остатак који се добија при дељењу тог збира са 10.

У почетном положају збир бројева придружених жетонима једнак је $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, а остатак при дељењу тог збира са 10 једнак је 5. У позицији код које сви жетони стоје на једном пољу, на пример k , збир бројева придружених жетонима једнак је $10k$, и тај збир је дељив са 10. Према томе, није могућно све жетоне преместити на исто поље.

4. На табли је записано 1995 нула, 1996 јединица и 1997 двојки. Дозвољено је у једном кораку избрисати две различите цифре и записати ону од цифара 0, 1, 2 која није брисана у том кораку.

(а) Ако је на табли остала записана само једна цифра, одредити која је то цифра.

(б) Да ли је могућно да после извесног броја корака на табли остану записане само нуле?

Решење. Приметимо да се после сваког корака мења парност броја нула, броја јединица и броја двојки које су записане на табли. Према томе, после сваког корака број нула и број двојки које су записане на табли су исте парности, а број јединица има различиту парност од претходна два броја (јер је на почетку био непаран број нула и непаран број двојки и паран број јединица). Према томе одговори на постављена питања су следећи:

(а) Та цифра може бити само јединица.

(б) Није могућно, јер би то значило да је на табли остало нула јединица и нула двојки, тј. у завршној позицији број јединица и број двојки били би исте парности.

5. У поља квадрата 4×4 уписани су знаци $+$ и $-$ као на слици 1. Дозвољено је у једном кораку променити знак у свим пољима једне колоне, једне врсте или једне дијагонале. (Дијагонала може садржати 4, 3, 2 или једно поље, тј. свако угаоно поље се такође сматра дијагоналом.) Да ли се понављањем ове операције може добити квадрат у чије је свако поље уписан знак $+$?

Решење. Заменимо сваки знак плус бројем $+1$, а сваки знак минус бројем -1 . Уочимо осам поља која су означена на слици 2.

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Сл. 1

	•	•	
•			•
•			•
	•	•	

Сл. 2

Приметимо даље да се у сваком кораку мења знак тачно у два од тих осам означених поља или ни у једном од тих поља. На основу тога закључујемо да се производ бројева у осам означених поља не мења применом дозвољене операције. Како је на почетку тај производ једнак -1 , то он мора такав бити после сваког корака. Према томе, није могуће добити таблицу у којој су записани само плусеви, јер би у том случају поменути производ био једнак 1 .

6. Квадрат 10×10 подељен је на 100 јединичних квадрата (које ћемо у даљем називати пољима). На почетку је 9 од тих 100 поља обрасло у коров. После сваке јединице времена у коров зараста и свако поље које пре тога има бар два суседна поља која су била зарасла у коров. (Поља су суседна ако имају заједничку страну.) Да ли цео квадрат 10×10 може зарастати у коров?

Решење. Приметимо да када неко ново поље зарасте у коров, онда се обим фигуре која је зарасла у коров не повећава. Заиста, када ново поље зарасте у коров, онда бар две стране тог поља (квадрата) које су биле граница области која је под коровом престају да буду граница те области. Истовремено највише две стране тог поља, које нису биле граница области обрасле под коров, постају граница те области. Како је обим области која је обрасла у коров на почетку највише $9 \cdot 4 = 36$, а обим квадрата 10×10 једнак је 40, то следи да цео квадрат 10×10 не може да зарасте у коров.

Други интересантни задаци о инваријантама могу се пронаћи у текстовима који су у целини или делимично посвећени овој теми, а садржани су у наведеној литератури.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ионин, Ю; Курляндчик, Л. Д: *Поиск инварианта*, «Квант», 1976, No. 2.
- [2] Курляндчик, Л. Д; Фомин, Д. В: *Этюды о полуинварианте*, «Квант», 1989, No. 7.
- [3] Залгаллер, В; Залгаллер, С: *Венгерский шарнирный кубик*, «Квант», 1980, No 12.
- [4] Прасолов, В. В: *Задачи по планиметрии*, часть 2, Москва, «Наука», 1991.
- [5] Младеновић, П: *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 1992.