Др Милојица Јаћимовић
др Слободан Вујошевић

ПАРАДОКСАЛНИ СКУПОВИ

Парадоксалним се у математици најчешће називају резултати који значајно противрече нашој интуицији. У принципу, парадокси се могу јавити из два разлога. Прво, као последице неодговарајућих претпоставки одређене математичке теорије и друго, услед недовољне развијености наше интуиције.

У првом случају, такви резултати се могу елиминисати ревизијом теорије у којој су настали. На пример, парадокс скупа свих скупова, или Раселов парадокс, превазиђен је аксиоматским заснивањем теорије скупова. Беријев парадокс „најмањег броја који се не може изразити са мање од шездест знакова“, а управо смо то учинили са педесет девет слова, последица је непрецизно формулисаног појма изражавања бројева и када се он коректно формулише Беријев парадокс нестаје.

Овакву употребу термина парадокс оставила нам је филозофско математичка традиција, али се подразумева да се ту просто ради о математичкој погрешци. Можда се овом терминолошком заменом изражавала озбиљност погрешке и њене евентуално погубне последице за одговарајућу теорију?

У правом смислу те речи, парадоксални су само они резултати који, без обзира на математичку коректност, противрече интуицији и нису отклоњиви ревизијом претпоставки на којима су засновани. У том случају, остаје нам једино да се на такав резултат навикнемо и да га прихватимо.

На пример, такав је такозвани парадокс бесконачности, односно чињеница да је бесконачан скуп еквивалентан свом правом делу. Иако данас математичари ту чињеницу прихватају без икаквих резерви, чак као дефиницију бесконачности, када се са њом први пут сусрео, Галилеј је остао веома зачуђен. Његова аритметичка интуиција, као и наша уосталом, заснивала се на искуству са коначним скуповима. У први мах он је закључио да аритметика бесконачних скупова уопште није могућа и посумњао у легитимност сваког математичког расуђивања које се позива на бесконачност.

Слично бројању, које почива на аритметичкој интуицији, идеја мерења у својој основи има јаку геометријску интуицију. Ако смо добро мерили, очекујемо да кретање скупа, ротација или транслација, не мења његову меру. Међутим, у заснивањима теорије мере, у првој половини овог века, појавио се читав низ

Саопштено на 9. конгресу математичара Југославије, Петровац, 22–27. маја 1995.

резултата који у овом смислу противрече интуицији. Међу њима значајно место има парадоксално разлагање лопте.

1914. године, Хауздорф је доказао да слободна група допушта разлагања чији ефекат на јединичну сферу изгледа сасвим неочекивано и потпуно супротно нашој геометријској интуицији. 1924. године, ослањајући се на овај Хауздорфов резултат, Банах и Тарски [3] су доказали да се јединична лопта може разложити на коначно много делова од којих се, кретањем у простору, могу сложити две лопте. У овом раду показаћемо да се такво разлагање може извршити са једанаест делова [8].

У доказу те теореме кључну улогу има чињеница да група изометрија простора садржи слободну подгрупу генерисану са два елемента и аксиома избора. То наглашавамо зато што се овај парадокс, најчешће сасвим површно, ставља на душу аксиоми избора и тако доводи у питање легитимност позивања на овај скуповно теоретски принцип. Међутим, иако у просторима већих димензија има исту снагу као на правој и у равни, у првом случају аксиома избора омогућава парадоксална разлагања, а у другом обрнуто, спречава таква разлагања. Парадоксална разлагања су ипак последица својстава групе кретања у простору.

Сасвим прецизно, из чињенице да група изометрија простора садржи слободну подгрупу, на основу аксиоме избора доказује се парадоксална декомпозиција лопте. На правој и у равни, из чињенице да група изометрија не садржи слободну подгрупу, на основу аксиоме избора доказује се да парадоксална декомпозиција лопте није могућа. Као и у случају бесконачности, не преостаје нам ништа друго до да се навикавамо на аксиому избора и да је прихватимо.

Слободна група

У основи разложиве једнакости скупова налази се идеја разложиве подударности геометријских ликова. Квадрат над хипотенузом разложив је на троуглове од којих се могу склопити квадрати над катетама. То склапање се изводи кретањем, односно, трансформацијама подударности. Било која два правоугаоника исте површине су разложиво подударна, тј. сваки од њих је раставља ив на троуглове од којих се кретањем може склопити онај други. Када се та идеја развије и прецизно формулише добија се следећа дефиниција разложиве једнакости скупова с обзиром на одређену фамилију трансформација.

Нека је G фамилија бијекција скупа X. Скупови $A, B \subseteq X$ су G-разложиво једнаки ако постоје коначне партиције $A_1, \dots, A_n \subseteq A$, $B_1, \dots, B_n \subseteq B$ и трансформације $f_1, \dots, f_n \in G$ такве да је $f(A_1) = f(B_1), \dots, f(A_n) = f(B_n)$.

Скупови $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ чине партицију скупа A ако су међусобно дисјунктни и ако је њихова унија једнака скупу A. G-разложиву једнакост скупова A и B означаваћемо са $A \sim_G B$ или, ако желимо да нагласимо број $n \in \omega$ елемената партиције, са $A \sim_n B$.

Ако фамилија бијекција G чини групу тада кажемо да је на X задато дејство групе G.

Чињеница да се лопта може разложити на пет делова од којих се кретањима у простору могу склопити две лопте изгледа збуњујуће. Ако је она заиста тачна онда није јасно зашто су средњовековни алхемичари тако олако схваћени у науци. Овај феномен разлагања лопте је парадигма математичке дефиниције парадоксалности.

Скуп $A \subseteq X$ је G-парадоксалан ако постоји партиција $A_1, A_2 \subseteq A$ таква да је $A \sim_G A_1 \sim_G A_2$.

Интуитивно, скуп је G-парадоксалан ако је разложив на коначно много делова од којих се G-трансформацијама могу добити његове две G-копије.

У овим дефиницијама разложива једнакост и парадоксалност су релативизоване на фамилију трансформација која најчешће припада некој групи. Феномен парадоксалности је заправо израз таквих својстава групе. Он се увек јавља када та група садржи или је у извесном смислу блиска слободној групи.

Слободна група генерисана скупом X слободних генератора је група која, осим закона групе, не задовољава ниједан други закон. Она се сатоји од свих речи над словима из скупа X сведених по законима групе.

Слободну групу генерисану са два елемента означаваћемо са F. Ако су a и b генератори групе F тада се сваки њен елемент g се може представити у облику

$$g = a^{k_1} b^{l_1} \cdots a^{k_n} b^{l_n},$$

гдје су k_i и l_i цијели бројеви при чему само k_1 и l_n могу бити једнаки нули. Притом, јединични елемент 1 групе F се не може представити на такав начин. Заправо, група F се састоји од свих сведених речи, у смислу аксиома теорије група, састављених од слова a и b.

Проучавајући питање егзистенције парадоксалних скупова, Хауздорф [10] је приметио да је слободна група сама по себи парадоксалан скуп.

Теорема 1. *Слободна група се може разложити на скупове A и $A' \subseteq F$ тако да је $A \sim_2 F \sim_2 A'$.*

Доказ. Да бисмо одредили скупове A и A', индукцијом по природним бројевима истовремено дефинишемо три низа подскупова групе F. Нека је $A_0 = \{1\}$, $B_0 = \emptyset$ и $C_0 = \emptyset$. Претпоставимо да су A_n, B_n и C_n дефинисани тако да садрже само речи дужине n састављене од слова a и b. Скупови A_{n+1}, B_{n+1} и C_{n+1} задовољавају следеће услове:

$$\begin{aligned} &aA_n, a^{-1}A_n, bA_n \subseteq B_{n+1} \text{ и } b^{-1}A_n \subseteq C_{n+1}\\ &aB_n, a^{-1}B_n, b^{-1}B_n \subseteq A_{n+1} \text{ и } bB_n \subseteq C_{n+1}\\ &aC_n, a^{-1}C_n, bC_n \subseteq A_{n+1} \text{ и } b^{-1}C_n \subseteq B_{n+1}. \end{aligned}$$

Притом, $yX_u = \{\, yx : x \in X_u \text{ и } yx \text{ је реч дужине } n+1 \,\}$, за све $y \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.

Нека је $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, $B = \cup_{n\in\omega} B_n$ и $C = \cup_{n\in\omega} C_n$. Скупови A,B и C чине партицију групе F. Имајући у виду њихову дефиницију, лако се проверава да важе следеће једнакости:

$$aA = B \cup C, \quad bA = B \quad \text{и} \quad bB = C.$$

Нека је $A' = B \cup C$. Тада $A' \sim_1 A$, $A \sim_1 B$, $B \sim_1 C$, тј. $A' \sim_1 C$. Како је $F = A \cup A'$ и $A' = B \cup C$ то је $A' \sim_2 F$, односно $F \sim_2 A$. ■

Није тешко проверити да се претходна конструкција може извести у свакој групи која садржи подгрупу изоморфну слободној групи F.

Група ротација SO_3 простора $\mathbf{R}^3$, са осама ротације које пролазе кроз координатни почетак, садржи подгрупу изоморфну слободној групи F.

Да бисмо то доказали, приметимо да се група SO_3 може представити ортогоналним матрицама реда 3×3 са детерминантом једнаком јединици. Нека је ϕ ротација око праве $x = z$, $y = 0$ за угао π и нека је ψ ротација око z-осе за угао $\frac{2\pi}{3}$. Ротације ϕ и ψ представљене су матрицама

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и притом је $\phi^2 = 1$ и $\psi^3 = 1$. Нека је $a = \psi\phi\psi$ и $b = \phi\psi\phi\psi\phi$. Група F генерисана ротацијама a и b је слободна група.

Претпоставимо супротно. Тада постоји $n > 0$ и цели борјеви $k_1, \ldots, k_n$; $l_1, \ldots, l_n$, различити од нуле, такви да је

$$1 = a^{k_1} b^{l_1} \cdots a^{k_n} b^{l_n}.$$

Имајући у виду дефиниције ротација a и b, јединични елемент се може представити у облику $1 = \phi^s \psi^{r_1} \phi \psi^{r_2} \phi \cdots \psi^{r_m}$ за неке $r_1, \ldots, r_{m-1} \in \{1, 2\}$, $r_m \in \{0, 1, 2\}$ и $s \in \{0, 1\}$. У матричној репрезентацији, овај производ ни за једну комбинацију бројева $s, r_1, \ldots, r_m$, $m > 0$, није једнак јединичној матрици. Дакле, група генерисана елементима a и b је слободна.

Класу група које садрже слободну подгупу F означаваћемо са FG.

Група је G парадоксална ако допушта парадоксалну декомпозицију, тј. ако постоји партиција $A, B \subseteq G$ таква да је $A \sim_n G \sim_n B$. Класу парадоксалних група означаваћемо са PG.

Јасно, $FG \subseteq PG$ али обрнута импликација не важи. Да то илуструјемо, подсетимо се да је група G периодична ако сваки њен елемент има коначан ред. Периодичне групе не садрже слободну подгрупу и притом, постоји парадоксална периодична група. На пример, слободна група $B(2, 665)$ са два генератора у којој је сваки елеменат реда 665 је парадоксална група [6]. У овом случају, група $B(2, 665)$ је слободна група с обзиром на аксиоме теорије група и једнакост $x^{665} = 1$.

Парадоксално разлагање лопте

Детаљно ћемо разложити проблем егзистенције парадоксалних скупова у простору $\mathbf{R}^n$ у односу на групу G_n изометрија простора $\mathbf{R}^n$, $n \in \omega$. Доказаћемо да у просторима димензије $n \geqslant 3$ постоје парадоксални скупови позитивне Лебегове мере. У односу на групу G_1, на правој нема парадоксалних скупова, а у односу на G_2 у равни такви могу бити само скупови Лебегове мере нула.

Теорема 2. *На јединичној сфери S простора $\mathbf{R}^3$ постоји скуп $E \subseteq S$ такав да: (i) четири копије скупа E добијене ротацијама покривају S и (ii) C садржи бесконачно много дисјунктних копија скупа E добијених ротацијама.*

Наглашавамо да се копије скупа E, о којима се говори у теореми, добијају ротацијама простора $\mathbf{R}^3$. Тај скуп заиста има зачуђујућа својства. Ако га ротирамо на један начин, у четири корака покријемо читаву сферу. Са друге стране, на сфери се ротацијама може распоредити бесконачно много дисјунктних копија скупа E.

Доказ. Нека су ротације $a, b \in SO_3$ такве да је група $F(a,b) = F$ слободна. На сфери S дефинишемо релацију еквиваленције $\sim$ тако да за све $x, y \in S$,

$$x \sim y \ \text{ ако и само ако постоји } f \in F,\ y = f(x).$$

Све класе еквиваленције су пребројиве. Нека је C унија свих класа које садрже бар једну фиксну тачку неког неидентичког пресликавања из F. Како свако такво пресликавање има тачно две фиксне тачке и како је група F пребројива, скуп C је такође пребројив.

Према аксиоми избора, нека је $H \subseteq S$ скуп који садржи по једног представника сваке од класа еквиваленције. Свака тачка $x \in S \backslash C$ има јединствену репрезентацију облика $x = f_x(y)$, где је $f_x \in F$ и $y \in H$.

Нека је $U \subseteq F$ скуп свих речи које почињу са a^k, $k \neq 0$ и нека је

$$E = \{\, x \in S \backslash C : f_x \in U \,\}.$$

За све $m \neq n$, скупови $b^m E$ и $b^n E$ су дисјунктни, тј важи тврђење (ii).

Како је $U \cup aU = F$ то је $S \backslash C \subseteq E \cup aE$. Скуп C је пребројив. Како је група SO_3 непребројива, постоји ротација $r \in SO_3$ таква да је $C \cap rC = \emptyset$. Отуда је $rC \subseteq E \cup aE$, тј. $C \subseteq r^{-1}E \cup r^{-1}aE$ па дакле

$$S \subseteq E \cup aE \cup r^{-1}E \cup r^{-1}aE,$$

што доказује тврђење (i). ∎

Хауздорф је знао за овај феномен. Он је открио парадоксалну декомпозицију слободне групе, пронашао слободну подгрупу у групи изометрија простора и њен парадоксалан ефекат на сфери. Практично, био је само на корак од главног резултата. Тај корак направили су Банах и Тарски захваљујући једној варијанти Кантор-Бернштајнове теореме [2].

Теорема 3. *Ако је f инјективно пресликавање скупа A у скуп B и g инјективно пресликавање B у A тада постоје партиције $A_1, A_2 \subseteq A$ и $B_1, B_2 \subseteq B$ такве да $f(A_1) = B_1$ и $g(B_2) = A_2$.*

Доказ. На пару скупова (A, B) дефинишимо граф Γ тако да за произвољне $x \in A$, $y \in B$, x и y су повезане тачке графа Γ ако и само ако $y = f(x)$ или $x = g(y)$. Како су f и g инјективна пресликавања, свака (повезана) компонента графа Γ је циклус или бесконачна путања у једном или оба правца. За сваку компоненту C графа Γ, $f(C \cap A) = C \cap B$ или $g(C \cap B) = C \cap A$. Нека је

$$A_1 = \bigcup \{\, C \cap A : C \text{ компонента у } \Gamma \text{ и } f(C \cap A) = C \cap B \}.$$

Скупови $A_2 = A \backslash A_1$, $B_1 = f(A_1)$ и $B_2 = g^{-1}(A_2)$ задовољавају услов теореме. ∎

Ова теорема има заиста зачуђујуће последице. На пример: ако је K круг и Q квадрат тада постоје партиције $K = K_1 \cup K_2$ и $Q = Q_1 \cup Q_2$ такве да је скуп K_1 хомотетичан са Q_1 и K_2 хомотетичан са Q_2.

Корак који је недостајао Хауздорфу у доказу парадоксалне декомпозиције лопте је следећа непосредна последица Кантор-Бернштајнове теореме:

Ако група G дејствује на X и ако је $A_1 \subseteq A \subseteq X$, $B_1 \subseteq B \subseteq X$ тада $A \sim_m B_1$ и $A_1 \sim_n B$ имплицира $A \sim_{m+n} B$.

Разложива једнакост $A \sim_m B_1$ и инклузија $B_1 \subseteq B$ одређују инјекцију f из A у B, а разложива једнакост $B \sim_n A_1$ и инклузија $A_1 \subseteq A$ одређују инјекцију g из B у A. На основу Кантор-Бернштајнове теореме ефекат функције g на елементе m-партиције скупа A је $m+n$-партиција у A, а ефекат функције f на елементе n-партиције у B, $m+n$-партиција скупа B. Ове партиције одређују $m+n$-разложиву једнакост скупова A и B.

Теорема 4. *Лопта се може разложити на једанаест делова од којих се могу склопити две лопте.*

Доказ. Нека је E скуп чије четири копије покривају сферу S. Ако је $E^* = \bigcup\{xE : 0 < x \leqslant 1\}$ и B јединична лопта тада је

$$B \subseteq E^* \cup aE^* \cup r^{-1}E^* \cup r^{-1}aE^* \cup tE^*,$$

где је t транслација простора таква да $0 \in tE^*$. Нека је $A_1, \dots, A_5$ партиција јединичне лопте B одређена претходним покривањем и нека је B_1 јединична лопта дисјунктна са B. Према својству (ii), десет дисјунктних копија скупа E се ротацијама може распоредити на сферу S, тј. десет дисјунктних копија скупа E^* се може ротацијама и транслацијама сместити у лопту B. Ако у сваку од тих десет копија распоредимо редом копије скупова $A_1, \dots, A_5, A_1, \dots, A_5$ тада

$$B \subseteq B \cup B_1 \quad \text{и}$$
$$A_1' \cup \dots \cup A_5' \cup A_1'' \cup \dots \cup A_5'' \subseteq B.$$

Како је $A_1^{'} \cup \dots \cup A_5^{'} \cup A_1^{''} \cup \dots \cup A_5^{''} \sim_{10} B \cup B_1$ и $B \sim_1 B$, према последици Кантор-Бернштајнове теореме, $B \sim_{11} B \cup B_1$. ∎

У раду из 1924. године, у коме су открили парадоксалну декомпозицију лопте, Банах и Тарски [3] нису прецизирали број делова довољан за такву декомпозицију. Касније, 1929. године фон Нојман [10] је доказао да се она може извршити са девет делова, 1945. године Серпински [13] је извео конструкцију у којој је било довољно осам делова и коначно, 1947. године, Робинсон [11] је доказао да је пет минималан број делова неопходан за парадоксалну декомпозицију лопте.

Теорема 5. *Ако су $A, B \subseteq \mathbf{R}^3$ ограничени скупови чија унутрашњост није празна тада је $A \sim_{G_3} B$.*

Доказ. Не умањујући општост, можемо претпоставити да сваки од скупова A и B садржи јединичну лопту и да се сваки од њих може покрити са $n \in \omega$ копија јединичне лопте. Како и A и B садрже $5n$ дисјунктних копија скупа E^* то је $A \sim_{G_3} B$. ∎

Ако је $n \geqslant 3$, парадоксална разлагања n-димензионалне јединичне лопте су могућа будући да у тим случајевима група изометрија G_n простора $\mathbf{R}^n$ садржи слободну подгрупу.

Парадоксални скупови на правој

За разлику од димензија већих од два, групе изометрија G_1 и G_2 не садрже слободну подгрупу. Стога, проблем егзитенције парадоксалних скупова на правој и у равни морамо посебно размотрити. Показаћемо да ни права ни раван не допуштају парадоксална разлагања типа разлагања лопте. У односу на групу G_1, на правој нема парадоксалних скупова, а у односу на G_2, такви скупови у равни могу бити само скупови Лебегове мере нула.

Доказ да права уопште не садржи парадоксалне скупове заснива се на једној особини групе G_1 коју је 1945. године уочио Серпински [12].

Ако је G група и $g_1, \ldots, g_r \in G$, са $G^n(g_1, \ldots, g_r)$ означавамо број речи дужине $\leqslant n$ састављених од слова $g_1, \ldots, g_r$. Од r елемената групе G може се добити највише r елемената дужине један, највише r^2 елеменета дужине два и, у општем случају, највише r^n елемената дужине n. Међу њима може бити истих; ако је група комутативна, није слободна или ако су елементи $g_1, \ldots, g_r$ зависни.

Група Γ је експоненцијално ограничена ако за произвољне $g_1, \ldots, g_r \in G$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји $k \in \omega$ такво да за свако $n > k$, $G^n(g_1, \ldots, g_r) \leqslant (1+\varepsilon)^n$.

На пример, за свако $n \geqslant 2$, група изометрија G_n није експоненцијално ограничена. То следи из чинените, коју ћемо ускоро доказати, да експоненцијално ограничене групе не допуштају парадоксална разлагања. Комутативна група је експоненцијално ограничена јер, свака реч дужине $\leqslant n$ над словима $g_1, \ldots, g_r \in G$ у комутативној групи има облик $g_1^{k_1} \cdots g_r^{k_r}$, где су k_i цели бројеви такви да $-n \leqslant k_i \leqslant n$. Отуда је $G^n(g_1, \ldots, g_r) \leqslant (2n+1)^r < (1+\varepsilon)^n$, за довољно велико n.

Класу експоненцијално ограничених група означаваћемо са EG. Ако је CG класа комутативних група тада $CG \subseteq EG$.

Теорема 6. *Група G_1 је експоненцијално ограничена.*

Приметимо да група изометрија праве G_1 није комутативна. Њени елементи су транслације и симетрије. Дакле, инклузија $CG \subseteq EG$ је стриктна.

Доказ. Свака изометрија $g \in G_1$ је облика $g(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, где је $a \in \{-1, +1\}$ и $b \in \mathbf{R}$. Нека су $g_1, \ldots, g_r \in G_1$ изометрије такве да је $g_i(x) = a_i x + b_i$. Производ $g = g_{i_1} \cdots g_{i_n}$ дужине $\leqslant n$ има облик $g(x) = ax + b$, за неке $a \in \{-1, +1\}$ и $b = k_1 b_1 + \cdots k_r b_r$, где су k_i цели бројеви такви да $-n \leqslant k_i \leqslant n$. Број различитих b је највише $(2n+1)^r$ па је $G^n(g_1, \ldots, g_r) \leqslant 2(2n+1)^r < (1+\varepsilon)^n$, за довољно велико n. ■

Теорема 7. *Ако експоненцијално ограничена група G дејствује на X тада X не садржи непразан G-парадоксалан подскуп.*

Доказ. Нека је $A \subseteq X$ непразан G-парадоксалан скуп. То значи да постоји партиција $B, C \subseteq A$ таква да је $A \sim_G B \sim_G C$.

Нека су $A_1, \ldots, A_r \subseteq A$, $A_1', \ldots, A_s' \subseteq A$, $B_1, \ldots, B_r \subseteq B$, $C_1, \ldots, C_s \subseteq B$ и партиције скупова A, B и C и нека су $f_i, g_j \in G$ пресликавања таква да за све $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f_i(A_i) = B_i$ и за све $j \in \{1, \ldots, s\}$, $g_j(A_j') = C_j$. Ако су F_1 и F_2 функције дефинисане на A такве да

$$F_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ако } x \in A_1, \\ \cdots & \cdots \\ f_r(x), & \text{ако } x \in A_r, \end{cases} \quad \text{и} \quad F_2(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{ако } x \in A_1', \\ \cdots & \cdots \\ g_s(x), & \text{ако } x \in A_s', \end{cases}$$

тада је $F_1(A) = B$ и $F_2(A) = C$. Ако су композиције $F_{i_1} \cdots F_{i_n}$ и $F_{j_1} \cdots F_{j_n}$ такве да бар за једно k, $i_k \neq j_k$ тада за свако $x \in A$,

$$F_{i_1} \cdots F_{i_n}(x) \neq F_{j_1} \cdots F_{j_n}(x).$$

За свако $x \in A$, одређено је 2^n различитих вредности $F_{i_1} \cdots F_{i_n}(x)$. Свака од вредности је облика $h_1 \cdots h_n(x)$, за неке $h_1, \ldots, h_n \in \{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s\}$. Отуда следи да речи дужине $\leqslant n$ над словима f_i, g_j дефинишу бар 2^n различитих елемената групе G што противречи претпоставци да је G експоненцијално ограничена група. ■

Група G_1 је експоненцијално ограничена па на правој нема G_1-парадоксалних скупова. Ако се у дефиницији разложиве једнакости допусти разлагање на пребројиво много делова тада на правој постоје скупови који су *пребројиво* парадоксални у односу на изометрије. Користећи уобичајену Виталијеву конструкцију немерљивог скупа, лако се показује да је сваки интервал пребројиво раложиво једнак са читавом правом. Ако се у пребројиво разложивој једнакости захтева мерљивост дјелова тада су свака два Лебег мерљива подскупа од $\mathbf{R}$ са непразном унутрашњошћу пребројиво разложиво једнака ако и смо ако су исте мере.

Парадоксални скупови у равни

Лебегова мера λ_n, као ненегативна σ-адитивна G_n-инваријантна функција, не може се проширити на све подскупове простора $\mathbf{R}^n$. Природно је питање да ли је то могуће ако се σ-адитивност замени коначном адитивношћу. Парадокс лопте, чији се доказ заснива на аксиоми избора, показује да за $n \geqslant 3$ то није могуће.

Међутим, због решивости групе G_2, на основу Хан-Банахове теореме, Лебегова мера λ_2 има адитивну G_2-инваријантну екстензију на све подскупове равни. Будући да се Хан-Банахова теорема доказује позивањем на аксиому избора, њен ефекат у равни је потпуно супротан ефекту који има у простору.

Решивост групе G_2 и егзистенцију проширења Лебегове мере са наведеним својствима доказаћемо касније.

Нека је μ адитивна G_2-инваријантна екстензија Лебегове мере на $P(\mathbf{R}^2)$. Ако су скупови $A, B \subseteq \mathbf{R}^2$ G_2-разложиво једнаки тада мора бити $\mu(A) = \mu(B)$. Стога, ако је A парадоксалан скуп и $B, C \subseteq A$ партиција таква да $A \sim_{G_2} B \sim_{G_2} C$ тада је $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C) = 2\mu(A)$, тј. $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = \infty$. Како је μ екстензија Лебегове мере у равни не постоји парадоксалан скуп позитивне коначне мере.

Да у равни ипак постоје парадоксални скупови показали су Мазуркијевић и Серпински [9] још давне 1914. године. Нека је P скуп свих полинома са ненегативним цијелим коефицијентима и $c \in C$ трансцендентан комплексан број такав да $|c| = 1$. Ако је $A = \{p(c) : p \in P\}$ тада постоји партиција $A_1, A_2 \subseteq A$ таква да је $A \sim_1 A_1 \sim_1 A_2$.

Нека је $A_1 = A + 1$ и $A_2 = cA$. Ако $z \in A_1 \cap A_2$ тада постоје $z_1, z_2 \in A$ такви да је $z = cz_1$ и $z = z_2 + 1$, тј. постоје полиноми $p_1, p_2 \in P$ такви да је $cp_1(c) = p_2(c)+1$. То би значило да је c коријен полинома $p(z) = zp_1(z)-p_2(z)-1$ чији су коефицијенти цијели бројеви. Како је c трансцедентан број, то је могуће само ако је $p_2(z) = zp_1(z) - 1$. Отуда следи да је слободни члан полинома p_2 једнак -1 што противречи претпоставци да полином p_2 припада скупу P. Очигледно, $A_1 \cup A_2 \subseteq A$. Обрнуто, нека $p(c) \in A$. Ако је слободни члан полинома p већи од нуле тада $p(c)$ припада A_1, а ако је нула тада $p(c)$ припада A_2, тј. $A \subseteq A_1 \cup A_2$.

Осим претходног примера, у коме парадоксалан скуп A није ограничен, у равни постоје и ограничени парадоксални скупови. Занимљиво, тај проблем је дуго био отворен. Тек недавно, 1988. године, W. Just [5] је конструисао такав скуп.

Нека је $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ јединични круг и $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ скуп решења једначине $z^3 = 1$, тј. $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$. За свако $z \in D$ изаберимо $\varepsilon(z) \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ тако да $z + \varepsilon(z) \in D$. Такав избор се увек може направити. Претпоставићемо да је $\varepsilon(0) = 1$. Нека је $c \in C$ трансцендентан број такав да је $|c| = 1$. За свако $k \in \omega$ нека је

$$\begin{aligned} B_k = \{\, c^k + a_{k-1}c^{k-1} + \cdots + a_0 : \forall j \in \{0, \ldots, k-1\}\; a_j = 0 \text{ или}\\ a_j = \varepsilon(c^{k-j} + a_{k-1}c^{k-j-1} + \cdots + a_{j+1}c)\}. \end{aligned}$$

За свако $k \in \omega$, скуп B_k се састоји од 2^k елемената. Сваки елемент из B_k се може представити у облику cw или $cw + \varepsilon(cw)$, за неко $w \in B_{k-1}$. Како за све $z \in D$, $z + \varepsilon(z) \in D$, за свако $k \in \omega$, $B_k \subseteq D$.

Нека је $B = \bigcup_{k \in \omega} B_k$ и $A = B \cup \{0\}$. Приметимо да $1 \in B$ (за $k = 0$). Скуп A је ограничен јер $A \subseteq D$.

Скуп cA се може представити као унија

$$cA = A_1 \cup A_\varepsilon \cup A_{\varepsilon^2}$$

дисјунктних непразних скупова $A_\eta = \{z \in cA : \varepsilon(z) = \eta\}$, $\eta \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Сви елементи скупа A су облика z или $z + \varepsilon(z)$ за неко $z \in cA$, $\varepsilon(z) \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ па је

$$A = cA \cup (A_1 + 1) \cup (A_\varepsilon + \varepsilon) \cup (A_{\varepsilon^2} + \varepsilon^2).$$

Наведена репрезентација скупа A је партиција. То следи из чињенице да је $c \in C$ трансцендентан број. У супротном, број c би био представљив као корен полинома са целим коефицијентима. ■

Приметимо да је парадоксална декомпозиција скупова у оба примера изведена ротацијама и транслацијама. Свака од њих посебно, за такву конструкцију није довољна. То је последица чињенице да су групе транслација T_2 и ротација SO_2 комутативне па дакле и експоненцијално ограничене.

Инваријантна мера

Функција $\mu : P(G) \longrightarrow [0,\infty]$ је адитивна инваријантна мера на групи G ако за све $A, B \subseteq G$, $A \cap B = \emptyset$ и свако $g \in G$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{и} \quad \mu(gA) = \mu(A).$$

Група G је покорна ако постоји адитивна инваријантна мера μ на G таква да је $\mu(G) = 1$. Класу покорних група означавамо са AG.

Група G је суперпокорна ако за сваки непразан скуп $A \subseteq G$ постоји адитивна инваријантна мера μ на G таква да $\mu(A) = 1$. Класу суперпокорних група означаваћемо са SG.

Тарски [15] је 1938. године доказао да ако G дејствује на скуп X и ако је $E \subseteq X$ тада: на $P(X)$ постоји адитивна G-инваријантна мера μ таква да $\mu(E) = 1$ ако и само ако E није G-парадоксалан скуп.

Свака група дејствује на саму себе. На основу претходног тврђења и чињенице да експоненцијалне групе не допуштају парадоксална разлагања, следи да је свака експоненцијално ограничена група суперпокорна. Дакле, $EG \subseteq SG \subseteq AG$. Тврђење $EG \subseteq SG$ важи само уз аксиому избора. Доказаћемо да су решиве групе покорне али нису обавезно суперпокорне, тј. не важи $AG \subseteq SG$.

Отворено је питање да ли је свака суперпокорна група експоненцијално ограничена, тј. да ли је $EG = SG$?

Група G је релативно парадоксална ако садржи парадоксалан скуп, тј, ако постији $X \subseteq G$ и партиција $A, B \subseteq X$ таква да $A \sim_n X \sim_n B$, $n \in \omega$. Класу релативно парадоксалних група означавамо са RG. Јасно, $PG \subseteq RG$ али обрнуто не важи. Пример таквих група су покорне групе које нису суперпокорне јер:

Покорне групе нису парадоксалне, а супер покорне нису релативно парадоксалне, тј. $AG \subseteq PG^c$ и $SG \subseteq RG^c$. Уз аксиому избора, на основу споменутог Тарскијевог резултата, важе и обратне импликације.

Група изометрија праве је супер покорна. Како у равни постоје парадоксални скупови, група изометрија равни није супер покорна. Показаћемо да је група G_2 покорна, односно општије, да је свака решива група покорна.

Нека је $\mu : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ адитивна мера, $A \subseteq X$, $\mu(A) < \infty$ и $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ ограничена функција. Ако је скуп вредности функције f коначан тада је $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$, где је $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ партиција скупа A. У том случају дефинишимо интеграл $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i)$. У општем случају нека је $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, где је $(f_n : n \in \omega)$ произвољан низ функција, од којих свака има коначан скуп вредности, који униформно конвергира f. Сасвим једноставно се проверава да је ова дефиниција коректна и да тако дефинисани интеграл има сва уобичајена својства интеграла.

Нека је I тривијална група. Група G је решива ако постоји низ њених подгрупа $G_1, \ldots, G_n$, $G_1 = I$ и $G_n = G$, такав да је свака подгрупа нормална подгрупа следеће, а њихова фактор група комутативна. Дакле, група је решива ако се може добити коначним бројем нормалних проширења комутативне групе.

Нека је SG_2 група изометрија равни које не мењају оријентацију, тј. група ротација и транслација равни и нека је T_2 група транслација равни. У низу I, T_2, SG_2, G_2 свака група је нормална подгрупа следеће, а одговарајуће фактор групе су комутативне. Дакле, група изометрија равни је решива.

Теорема 8. *Свака решива група је покорна.*

Доказ. Нека је G нормална подгрупа групе H. Довољно је доказати да: ако је H/G комутативна и G покорна тада је H такође покорна група. Како је $CG \subseteq EG \subseteq SG \subseteq AG$, довољно је доказати да ако су G и H/G покорне групе тада је и H покорна група.

Нека су μ и ν адитивне инваријантне мере на G, односно на H/G, такве да је $\mu(G) = \nu(H/G) = 1$. Меру μ прво проширујемо на скупове свих подскупова косета подгрупе G у групи H.

За свако $A \subseteq G$ и свако $h \in H$, $\mu(hA) = \mu(A)$. Ова дефиниција је коректна јер, ако су $A_1, A_2 \subseteq G$ такви да за неке $h_1, h_2 \in H$, $h_1A_1 = h_2A_2$ тада је $h_2^{-1}h_1 \in G$. Како је μ инваријантна мера то је $\mu(A_1) = \mu(h_2^{-1}h_1A_1) = \mu(A_2)$.

Нека је $\phi : H \longrightarrow H/G$ природни хомоморфизам. За свако $y \in H/G$, $\phi^{-1}(y)$ је косет подгрупе G у групи H.

Претпоставимо да је $A \subseteq H$ произвољан. За свако $y \in H/G$ нека је $g(y) = \mu(A \cap \phi^{-1}(y)$. Функција g је ограничена на H/G па је $\gamma(A) = \int_{H/G} g d\nu$ адитивна инваријантна мера на H за коју је $\gamma(H) = 1$, тј. H је покорна група. ∎

Обрат претходне теореме не важи, тј. није свака покорна група решива. Више од тога, постоји експоненцијално ограничена група која није решива [6]. На дијаграму та група је означена са H.

Теорема 9. *Ако је G покорна подгрупа групе изометрија G_n простора $\mathbf{R}^n$ тада Лебегова мера λ_n има адитивну G-инваријантну екстензију на $P(\mathbf{R}^n)$.*

Доказ. На основу Хан-Банахове теореме λ_n има адитивну екстензију μ на $P(\mathbf{R}^n)$. Група G је покорна па постоји адитивна G-инваријантна мера γ на G таква да је $\gamma(G) = 1$.

Нека је $A \subseteq \mathbf{R}^n$. За свако $g \in G$ нека је $f_A(g) = \nu(gA)$. Дефинишимо μ тако да

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & \text{ако } f_A \text{ није ограничена на } G, \\ \int_G f_A \, d\gamma, & \text{иначе.} \end{cases}$$

μ је коначно адитивна G-инваријантна мера на $P(\mathbf{R}^n)$ која проширује Лебегову меру λ_n. ∎

Група изометрија равни G_2 је решива па постоји адитивна G_2-инваријантна екстензија мере λ_2 на $P(\mathbf{R}^2)$. Решивост групе изометрија у равни не допушта парадокс на скуповима позитивне мере. Стога се природно поставља питање како та ствар стоји са проширењима групе G_2, на пример, у групи G афиних трансформација равни. У том случају [10] парадокс Банаха и Тарског се проширује и на раван, тј. свака два ограничена скупа са непразном унутрашњошћу су G-разложиво једнака. Заправо, то се добија проширењем групе G_2 само једном афином трансформацијом $(x, y) = (x + y, y)$. Такво проширење садржи слободну подгрупу која омогућава реконструкцију парадокса.

Осим група изометрија и група афиних трансформормација геометријски су релевантне и Лијеве групе. Свака таква група је или решива или садржи слободну подгрупу. То следи из чињенице да свака некомутативна компактна Лијева група садржи подгрупу изоморфну SO_3 или SU_2 групи за које знамо да садрже слободну подгрупу. То значи да су све групе које имају значајну улогу у геометрији или решиве или садрже слободну подгрупу.

У прегледу класе свих група у односу на проблем парадоксалне декомпозиције, датом на слици, осенчени скупови представљају геометријски релевантне групе, а испрекиданим линијама назначени су отворени проблеми у овој систематизацији.

Квадратура круга

За свако $n \in \omega$, група транслација T_n простора $\mathbf{R}^n$ је комутативна па постоји адитивна транслационо инваријантна екстензија Лебегове мере λ_n на $P(\mathbf{R}^n)$. У смислу транслација парадоксалних разлагања нема. Али, то не значи да нас и транслације неће збуњивати када поставимо питање какви све скупови могу бити транслационо разложиво једнаки. Један проблем тог типа је и Тарскијева [14] скуповно теоретска верзија проблема квадратуре круга из 1925. године.

Може ли се круг поделити на коначно много делова од којих се може склопити квадрат?

Укратко, да ли је круг разложиво једнак квадрату? Наша дефиниција G-разложиве једнакости сасвим подсећа на класичне проблеме разложиве једнакости геометријских ликова али је у извесном смислу ипак строжија. На пример, још у првој половини прошлог века Бољаи је знао да су свака два полигона разложиво једнака ако и само ако имају исту површину. Међутим, у таквом разлагању дозвољава се преклапање рубова делова, што у нашем случају није допуштено.

Само по себи није уопште јасно да ли таква теорема важи и у смислу G-разложиве једнакости и да ли се таквим разлагањем добијају полигони исте површине. То следи тек из својстава групе изометрија равни о којима смо говорили.

Општи одговор на питање разложиве једнакости скупова, а тиме и решење квадратуре круга, дат је недавно у раду мађарског математичара Миклоша Лацковића [7].

Теорема 10. *Ако су $A, B \in \mathbf{R}^n$ ограничени конвексни скупови такви да $\lambda_n(A) = \lambda_n(B) > 0$ тада је $A \sim_{T_n} B$.*

Доказ Лацковићевог резултата изложен је у прилично обимном раду. Он садржи низ скоро невероватних открића.

На пример, постоји коначан скуп T транслација праве такав да су свака два интервала једнаке дужине, садржана у јединичном интервалу $[0,1)$, T-разложиво једнака.

Сасвим поједностављено речено, комбинујући овај резултат са једном врстом Каваљеријевог принципа, уз аксиому избора, Лацковић је решио проблем квадратуре круга.

Дакле, круг је разложив на коначно много делова од којих се транслацијама може добити квадрат. Отворено је питање колики је тај број. Верује се да је то четири или чак три, ако се допусте и ротације [4].

Ако је модерна реминисценција на проблем квадратуре круга коначно решена, остао је нерешен проблем трисекције круга на G_1-разложиво једнаке делове. Бисекција круга, а такође и вишедимензионалне лопте, у овом смислу се не може извршити. Уопштавајући Банах Тарскијеву декомпозицију сфере, Робинсон је открио да трисекција лопте јесте могућа [4].

Завршавајући ово излагање вратићемо се на његов почетак. Ми верујемо да су феномени о којима се говорило у овој расправи заправо геометријске последице парадокса бесконачности. Парадоксална декомпозиција слободне групе је само његова рефлексија у групама, а рефлексија те рефлексије на скупове у простору су парадоксалне декомпозиције геометријских објеката.

Аутори се захваљују колеги Изедину Крнићу на корисним примедбама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach S., *Sur le problème de la mèsure*, Fund. Math. 4 (1923), 7–33.

[2] Banach S., *Un theoreme sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. 6 (1924), 236–239.

[3] Banach S., Tarski A., *Sur la decomposition des ensembles de point en partiesrespectivement congruents*, Fund. Math. 6 (1924), 236–239.

[4] Gardner R.J., Wagon S., *At long last, the circle has been squared*, Notic. Amer. Math. Soc. No. 10 Vol. 36 (1989).

[5] Just W., *A bounded paradoxical subset of the plane*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (1988), 1–3.

[6] Czyz J., *Hausdorff's paradox of the sphere*, Ins. of Math. Polish Ac. Sci., Preprint 511 (1993).

[7] Laczkovich M., *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. reine und angew. Math. (Crelle's J.) 404 (1990), 77–117.

[8] Laczkovich M., *Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes*, Rend. Inst. Math. Univ. di Trieste, Vol XXIII (1991), 145–176.

[9] Mazurkiewicz S, Sierpiński W., *Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties*, C.R. Acad. Sci. Paris 158 (1914) 618–619.

[10] Von Neumann J., *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13 (1929), 73–116.

[11] Robinson R.M., *On the decomposition of spheres*, Fund. Math. 34 (1947), 246–260.

[12] Sierpiński W., *Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski*, Fund. Math. 33 (1945), 229–234.

[13] Sierpiński W., *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition*, Lucknow, 1954.

[14] Tarski A., *Probléme 38*, Fund. Math. 7 (1925) 381.

[15] Tarski A., *Algebraische Fassung des Massproblems*, Fund. Math. (1938), 47–66.