Милан Шарић

МЕТОД ПОМОЋНИХ ФИГУРА

Често при решавању геометријских задатака потребно је допунити цртеж. Како га допунити? Коју праву повући? До које фигуре допунити цртеж? Коју идеју користити? Све су то питања која поставља ученик при решавању задатка.

На примеру једног задатка, предложеног на Савезном такмичењу за ученике I разреда средњих школа (1985) и VII разреда основних школа (1994), показаћемо неколико идеја за решавање задатка допуњавањем.

Задатак. *Нека је у унутрашњости квадрата $ABCD$ дата тачка P, таква да је $\angle PAB = \angle ABP = 15^\circ$. Доказати да је троугао PCD једнакостраничан.*

1. Допуне до фигура у којима знамо неке односе међу елементима.

1.1. Допуна до једнакостраничног троугла.

Нека је троугао PBR једнакостраничан, слика 1. Тада су троуглови ABP и BCR подударни, односно $BR = RC$. Даље су троуглови BCR и PRC такође подударни (две странице и угао међу њима), па је $PC = BC$. Како је $PC = BC = DC$, троугао PCD је једнакостраничан.

Сл. 1

Сл. 2

1.2. Допуна до квадрата.

Конструишимо над страницом PB квадрат $PBEF$, слика 2. Како су троуглови ABP и BEC подударни, то је $\angle BEC = 150^\circ$, односно $\angle FEC = 60^\circ$. Троугао FEC је једнакокраки са углом при врху E од 60°, значи једнакостраничан. Пошто је $\angle CFP = 150^\circ$, троуглови BEC и PCF су подударни, па је $BC = PC$, односно $\angle BPC = 30^\circ$. Дакле, троугао PCD је једнакокраки са углом при врху C од 60°, значи једнакостраничан.

1.3. Допуна до половине једнакостраничног троугла.

Повуцимо праву BE такву да је $\angle PBE = 15^\circ$, $E \in PC$ и нормалу CF на ту праву. Троугао FBC је половина једнакостраничног троугла па је $2\,FB = BC$. Како је $CB = 2\,BG$, то су троуглови PGB и FPB подударни, односно $\angle BFP = 90^\circ$. Значи да су тачке P, F, C колинеарне, то јест $E \equiv F$. Дакле, $\angle BCE = 30^\circ$, троугао PBC је једнакокраки и $PC = BC$, што значи да је троугао PCD једнакостраничан.

Сл. 3

Сл. 4

1.4. Допуна до једнакокраког трапеза.

Повуцимо праву BE тако да је $\angle PBE = 45^\circ$, сл. 4. Троугао EBF је половина једнакостраничног троугла, па је $BE = 2\,BF$, а како је $BC = 2\,BF$, то је троугао PBC једнакокраки са угловима 75°, 75° и 30°. Даље закључујемо да је четвороугао $PBCE$ једнакокраки трапез са угловима 75° и 105°, те су му дијагонале PC и BE једнаке, односно $PC = BC$. Даље закључујемо као у претходним решењима.

1.5. Допуна до правоуглог троугла са једним углом 15°.

Повуцимо нормалу CG на праву PB и нека је GN нормала на BC, а GM нормала на AB. Троугао BGC је правоугли са оштрим угловима 75° и 15°, па је $BC = 4\,GN$ (докажи). Како је $GN = BM = a/4$, то је GM средња линија троугла PFB. Дакле, тачка G је средиште дужи PB, па су троуглови PGC и BGC подударни, односно $PC = BC$.

Сл. 5

1.6. Допуна до тетивног четвороугла.

Продужимо CD преко D тако да је $CD = DE$. Нека је D центар описане кружнице троугла EAC. Ако тачка P лежи на кружници, задатак је решен, тј. троугао је једнакостраничан.

Претпоставимо да тачка P лежи унутар кружнице. Продужимо AP преко P тако да права AP сече кружницу у тачки P', сл. 6. Спојимо P' са C. Четвороугао $EAP'C$ је тетиван, па је $\angle EAP' + \angle P'CE = 180°$, тј. $\angle P'CE = 60°$. Како је троугао $P'CD$ једнакостраничан ($DC = P'C$, $\angle P'CD = 60°$), то је троугао $P'BC$ једнакокрак са угловима $30°$, $75°$, $75°$. Даље, $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBP' + \angle P'BC = 90°$, па је $\angle PBP' = 0°$. Дакле, $P \equiv P'$, тачка P' лежи на кружници и троугао PCD је једнакостраничан.

Аналогно доказујемо ако се тачка P налази изван кружнице.

Сл. 6

Наведимо још неколико начина за решавање овог задатка.

2. Метод лажне претпоставке.

Нека је у области квадрата Q тачка праве кроз P паралелне страници AD, различита од P, и претпоставимо да је $\triangle DQC$ једнакостраничан, сл. 7. Тада је троугао QDA једнакокрак са угловима $30°$, $75°$ и $75°$. Како је $\angle DAB = 75° + x + 15° = 90°$, то је $x = 0°$, па су тачке P и Q идентичне и троугао PCD једнакостраничан.

Сл. 7

3. Метод површина.

Нека је $AP \cap BC = E$, $H \in AE$, $BH \perp AE$, FG је симетрала квадрата, сл. 8. Уведимо ознаке: $AB = a$, $AE = c$, $BE = y$, $BH = h$, $PF = z$, $PC = x$. Изразимо површину троугла ABE на два начина: $ay/2 = ch/2$, одакле, због $c = 4h$ добијамо $ay = 4h^2$. С друге стране је $a^2 + y^2 = c^2 = 16h^2$. Замењујући из претходне релације добијамо квадратну једначину $y^2 - 4ay + a^2 = 0$, а одатле $y = 2a - a\sqrt{3}$ (због $0 < y < a$). Сада се лако добија $z = a - \dfrac{y}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, а одатле је $x = a$. Дакле, троугао PCD је једнакостраничан.

Сл. 8

Сл. 9

4. Примена ротације у равни.

Нека је троугао BCP' слика троугла ABP при ротацији за 90° око тачке B, и нека је P'' тачка симетрична тачки P' у односу на праву BC, сл. 9. Спојимо P'' и P. Како је $\angle PBP'' = 60^\circ$, то је $\triangle BPP''$ једнакостраничан троугао. Даље је $\angle P''PC = 15^\circ$, па су троуглови BCP'' и PCP'' подударни, односно $PC = BC$.

Сл. 10

5. Свођење на једноставнији задатак.

Нека је $ABCD$ дати квадрат и тачка P у његовој унутрашњости, тако да је $\angle PAB = \angle ABP = 15^\circ$. Конструишимо квадрат $BEFC$ над страницом BC, а затим конструишимо једнакостранични троугао CGF (где је G у унутрашњости новог квадрата), сл. 10. Спојимо G са B и E. Како је троугао CGF једнакостраничан, то су троуглови BEG, GEF и BGC једнакокраки, први са угловима 15°, 15°, 150°, а друга два 75°, 75°, 30°. Дакле, троуглови ABP и BEG су подударни а такође и троуглови PBC и GEF. Према томе, страница PC је једнака страници квадрата па је троугао PCD једнакостраничан.