НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1996, XLI, 3–4, стр. 12–21

Др Миливоје Лазић

О ВРЕДНОВАЊУ КВАЛИТЕТА ЗНАЊА МАТЕМАТИЧКИХ САДРЖАЈА

Уводне напомене

Приликом верификације знања математичких садржаја, како писмене тако и усмене, постоји могућност да два или више наставних радника различито вреднују једно исто знање. Узрок томе може да буде у различитој спремности и способности самих наставних радника, али и у различитом гледању на то шта су показатељи квалитета знања математичких садржаја. Ова наша расправа представља покушај да се гледање на квалитет знања бар у извесној мери објективизује. Међутим, по природи ствари, јасно је да се и са нашим гледиштем на то шта су показатељи квалитета знања математичких садржаја не морају сви да сложе. Упркос томе, верујемо да се ипак може доћи до извесних заједничких гледишта по том питању и да нека од овде изложених могу бити и шире прихватљива. У сваком случају, мислимо да за тим показатељима треба истрајно и промишљено трагати, као и да треба настојати да се макар део онога што је опште прихватљиво инкорпорира у непосредан рад са ученицима и студентима. То би, по нашем мишљењу, допринело унапређењу рада и његових резултата у овој области.

Неки показатељи квалитета знања математичких садржаја

1. О уверењу да треба све да се разуме

Приликом верификације знања могу се понекад чути изрази, као што су: „Не разумем дефиницију“; „Не разумем образац“; „Не разумем теорему“; итд. Ово је прилика да изнесемо наше мишљење да у математици можда и не мора баш све да се разуме, односно да не треба инсистирати на томе да се у математици све живо разуме. Залажемо се, наиме, за то да доста тога у математици треба узети „здраво за готово“, односно прихватити „као такво“, без оптерећивања при мислима да ли је то баш тако и зашто је (зашто мора да буде) тако. Мислимо да старијим ученицима и студентима треба постепено објашњавати да су основе математичких теорија увелико ствар договора (конвенције) и да смо се при томе, за нешто просто договорили да је (да буде) тако. Што пре ученици и студенти то уоче и прихвате, то ће, чини нам се, више себи олакшати „кретање кроз математику“ и савладавање математичких садржаја. При томе никако не мислимо да ученицима и студентима не треба говорити о мотивацији за увођење одређених математичких појмова, о интерпретацијама појмова и релација, примерима и применама математичког апарата, што треба да обезбеди сагледавање смисла и улоге свега тога и олакша његово запамћивање, као и да мотивише на размишљање о могућности коришћења истог. Но, по нашем мишљењу, *мора да се зна*, на пример: да је дуж тај и тај скуп, да је правоугаоник такав и такав четвороугао, да је извод то и то, да је диференцијабилна функција непрекидна, да је интеграл (одређени, неодређени) то и то итд. А када је реч о *разумевању*, о томе свакако, има смисла говорити када је реч: о односима међу разним математичким објектима и о карактеристикама истих; о последицама одређених претпоставки (при доказима тачности разних тврђења, на пример); о интерпретацији математичких објеката и примени математичког апарата; итд.

2. О значају познавања „теорије“ и комуникације са њом

У пракси се могу срести мишљења да је могуће увежбати решавање задатак и са слабим познавањем (одговарајуће) „теорије“. Мишљења смо, међутим, да је досег таквог знања скроман, и због тога што тада постоји могућност несналажења у решавању задатака добијених мањим варијацијама задатака чије је решење већ познато. Сматрамо, наиме, да се може говорити о успешном и квалитетном решавању задатака тек у случају када смо са решењем неког задатка у стању да решимо све сродне задатке, па и задатке добијене њиховим мањим варијацијама. А да би то било могуће, потребно је, заиста, солидније познавати одговарајућу „теорију“. (Наводнице смо употребили из разлога што у математици објективно није могуће стриктно раздвојити теорију и задатке: оно што је у неком контексту теорија, у другом (ширем, општијем) контексту може бити пример, илустрација, задатак. Јасно је да се симетричан коментар може дати и у односу на појам задатка.) Иначе, најквалитетнијим сматрамо онај начин решавања задатака (и проблема уопште) при коме се стално комуницира са одговарајућом теоријом, тј. објашњава зашто нешто важи, на основу чега се из нечега добија нешто друго и сл. И то је онај поступак који обезбеђује да са сваким решеним задатком имамо практично (аутоматски) решену читаву класу сличних и са њима повезаних задатака, о чему је напред било речи. У таквом поступку, такође, до пуног изражаја долази вредност и значај „теорије“, као и неопходност пуног „контакта“ са њом. Мишљења смо, дакле, да тек са познавањем одговарајуће „теорије“ можемо претендовати на солидно познавање неке математичке области, на успешно и квалитетно решавање проблема у тој области, као и на ширу употребну вредност тог знања. А доследан ослонац и експлицитно позивање на одговарајућу „теорију“ при решавању проблема у некој области (повратно) доприносе учвршћивању и унапређивању квалитета познавања саме те „теорије“.

Тако, на пример, уз констатацију да се између две различите x_1 и x_2 диференцијабилне функције $f(x)$ налази (бар једна) нула x_0 њеног извода $f'(x)$, мислимо да треба рећи да то важи на основу Ролове теореме и, по могућству, подсетити на њену формулацију, скрећући при томе пажњу да је диференцијабилна функција уједно и непрекидна. Или, када се, на пример, оперише са

$\int_a^b f(x)\,dx$ треба, уколико је тако, рећи да тај интеграл постоји и да је то тако (у случају непрекидне функције $f(x)$ на основу става да је непрекидна функција интеграбилна, односно, у случају монотоне функције $f(x)$, на основу става да је монотона функција интеграбилна и сл). Свакако да при томе треба објаснити (показати) зашто је (да је) посматрана функција непрекидна (монотона) итд.

Колико је вазно солидно познавање „теорије“ за успешно и квалитетно решавање математичких проблема показује и следећи пример. Ако се код одређеног интеграла тежиште стави на „механички део“ који представља Њутн-Лајбницова формула (превиђајући при томе услове под којима се уопште може говорити о одређеном интегралу као и да је појам примитивне функције везан за неки интервал), онда се могу добити бесмислене релације. Тако, на пример, формалном применом Њутн-Лајбницове формуле $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,(= F(x)|_a^b)$, где је $F(x)$ једна (било која) примитивна функција функције $f(x)$, добијамо једнакост

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \ln|x|\,\Big|_{-2}^{3} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

Међутим, о одређеном интегралу $\int_{-2}^{3} dx/x$ не може се ни говорити, већ због тога што подинтегрална функција $f(x) = 1/x$ није дефинисана за свако $x \in [-2,3]$. (Иста функција на скупу $[-2,)\cup(0,3]$ није ни ограничена, што, такође, искључује могућност посматрања $\int_{-2}^{3} dx/x$.)

Примећујемо, дакле, да непознавање „теорије“ понекад доводи до тога да се код математичких објеката тражи (испитује) нешто о чему нема смисла ни говорити. Исто тако, на пример, нема смисла испитивати парност функције $f(x) = \sqrt{x+1}$, односно да ли и кад важи $f(-x) = f(x)$, односно $f(-x) = -f(x)$ (зато што њена област дефинисаности $D_f = [-1,+\infty)$ није симетрична у односу на нулу), као што нема смисла говорити о периодичности функције $g(x) = 1/x$ (зато што је она опадајућа и у интервалу $(-\infty,0)$ и у интервалу $(0,+\infty)$.)

3. Могућност самопровере добијених резултата

Ни у наставној пракси ни при верификацијама знања није баш честа пракса упућивања слушалаца на могућност провере добијених резултата, односно коришћења такве могућности приликом извршавања испитних обавеза. А то је добро не само због тога што ученик и студент могу одмах да знају „на чему су“, већ и због тога што: у случају утврђивања грешке и располагања временом могу још увек да кориугују рад, а у случају тачности решења — добијају подстрек за даљи успешан и квалитетан рад.

Готово увек постоји већа или мања могућност самоконтроле рада. При томе, ако се, на пример, тврди да је исказна функција $p(x)$, тачан исказ за свако x из неког скупа A, па за неко $x_0 \in A$ утврдимо да исказ $p(x_0)$ није тачан, онда закључујемо да посматрано тврђење *(сигурно) није тачно*; ако, пак, утврдимо да су за x_1, x_2, … , $x_n \in A$ искази $p(x_1)$, $p(x_2)$, … , $p(x_n)$ тачни, онда закључујемо да *постоји могућност (али не и сигурност*, осим ако је $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, или ако некако другачије то утврдимо) *да је тврђење* $(\forall x \in A)\,p(x)$ *тачно*, а могућност његове тачности је утолико већа иколико је број n већи.

У неким ситуацијама, на пример код решавања једначина коришћењем (бар на једном месту) логичке импликације, провера добијеног резултата је обавезна. Наиме, ако се решава једначина $f(x) = 0$ и ако се за то користи низ састављен од логичких еквиваленција и бар једне логичке импликације: $f(x) = 0 <\equiv> \cdots <\equiv> f_i(x) = 0 <\equiv> \cdots <\equiv> f_n(x) = 0 \ \Rightarrow \ g(x) = 0$, онда је јасно да сва решења последње једначине $g(x) = 0$ *не морају* бити и решења полазне једначине $f(x) = 0$. Зато је тада потребно међу решењима једначине $g(x) = 0$ извршити селекцију: на она која су решења и једначине $f(x) = 0$ и на она која то нису. То се, у случају коначног броја решења $x_1, x_2, \ldots, x_m$ једначине $g(x) = 0$, може извести, а најчешће тако и чини, непосредном провером, тј. израчунавањем вредности $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и „дисквалификацијом“ оних бројева x_i за које је $f(x_i) \neq 0$.

Иначе, ако се при решавању неке једначине $f(x) = 0$ служимо само логичким еквиваленцијама $f(x) = 0 <\equiv> \cdots <\equiv> f_i(x) = 0 <\equiv> \cdots <\equiv> f_n(x) = 0 <\equiv> g(x) = 0$, онда је скуп решења последње једначине $g(x) = 0$ уједно и скуп решења полазне једначине $f(x) = 0$. У овом случају, дакле, нема потребе за селекцијом решења једначине $g(x) = 0$, али и даље остаје потреба, и овде и уопште, за контролом добијених резултата. Поред поменуте непосредне контроле, у неким случајевима постоји могућност посредне контроле тих резултата.

Узмимо, на пример, да треба одредити вредности параметара a и b тако да је $x = -1$ двострука нула полинома $P(x) = x^4 + ax^2 + b$. Тада се a и b могу одредити из система једначина $P(-1) = 0 \wedge P'(-1) = 0 \wedge P''(-1) \neq 0$, тј. из система $1 + a - b = 0 \wedge -4 - 2a = 0 \wedge 12 + 2a \neq 0$, што даје $a = -2 \wedge b = 1$. Према томе, резултат је полином $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Провера тог резултата може да се обави на више начина. Један, непосредан, је у томе да се израчуна $P(-1)$, $P'(-1)$ и $P''(-1)$ и да се види да ли су, заиста, прве две вредности једнаке нули и трећа различита од нуле (при чему је ослонац и начина решавања и провере на ставу да је x_0 двострука нула полинома $P(x)$ ако и само ако важи $P(x_0) = 0 \wedge P'(x_0) = 0 \wedge P''(x_0) \neq 0$). Други, посредан, начин провере може се састојати у томе да се испита да ли је заиста полином $P(x)$ дељив са $(x+1)^2$, али не и са $(x+1)^3$ (што се темељи на ставу да је x_0 двострука нула полинома $P(x)$ ако и само ако је $P(x)$ дељиво са $(x-x_0)^2$, али не и са $(x-x_0)^3$). Непосредним дељењем, лако се показује да је заиста полином $P(x)$ дељив са $(x+1)^2\ (= x^2 - 2x + 1)$ и да није дељив са $(x+1)^2\ (= x^3-3x^2+3x-1)$. То се, међутим, лако закључује и на основу линеране факторизације $P(x)$ у степеном облику: $P(x) = (x+1)^2(x-1)^2\ (= (x^2-1)^2)$. Као трећи, такође посредан, начин провере добијеног резултата (тј. да је $a = -2$, $b = 1$) може се сматрати, у ствари, нови начин решавања истог задатка. Наиме, делећи полином $P(x) = x^4 + ax^2 + b$ триномом $x^2 + 2x + 1$ добијамо остатак $-2(a+2)x + b - a - 3$, па је полином $P(x)$ дељив са $(x+1)^2$ ако и само ако је $-2(a+2) = 0 \wedge b - a - 3 = 0$, што даје $a = -2 \wedge b = 1$. Показавши затим да полином $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ није дељив са $(x+1)^3$, потврђује се тачност добијеног на први начин.

4. Више начина решавања проблема и рад са еквиваленцијама

Видели смо да се сваки нови начин решавања одређеног проблема може видети у функцији провере резултата, већ добијеног на неки други начин. Наше је мишљење, међутим, да случај више начина решавања једног те истог проблема треба третирати и као виши квалитет и излагања и знања математичких садржаја. У том смислу, залажемо се, кад год је то могуће, за демонстрацију више начина решавања једног те истог проблема, па и на сугерисање ученицима и студентима да покушају да одређени проблем реше и на неки други („свој“) начин.

Када је реч о више начина решавања једног те истог проблема, у ситуацији када се он може решити и средствима више и средствима елементарне математике, одређена предност се даје начину који користи средства елементарне математике. Ово из разлога што су средства елементарне математике приступачнија већем кругу заинтересованих и што то погодује не тако малом броју интересената којима је страно размишљање на вишем нивоу апстрактности. (Мада, на основу општег искуства, решавање одређених проблема средствима елементарне математике може да буде повезано са већим тешкоћама него у случају примене апарата више математике, где, понекад, резултат добијамо готово аутоматски.)

Исто тако, многима више одговара рад са логичким импликацијама, па онда селекција тако добијеног резултата у циљу постизања решења полазног проблема, него рад са логичким еквиваленцијама где за таквом селекцијом уопште нема потребе. По нашем мишљењу рад са логичким импликацијама је, у извесном смислу, „линија мањег отпора“, јер рад са логичким еквиваленцијама захтева виши степен интелектуалног напора и већи обим и квалитет знања. Баш због тога се и залажемо за више рада са еквиваленцијама у настави, на разним „пропитивањима“ и у уџбеницима. Што је неко више у могућности да у томе дуже истраје, утолико је, сматрамо, квалитет његовог излагања, односно знања, на вишем нивоу.

Наиме, уколико се ради и са логичким импликацијама, онда је често тежиште на механичким и техничким процедурама, а провера резултата такође је скопчана са низом сличних поступака (најчешће је ту реч о степеновању леве и десне стране једнакости, налажењу израза, односно израчунавању њихових вредности итд.). Уколико се, међутим, ради само са логичким еквиваленцијама, онда је ту често потребно унети много више суптилнијег односа, имати квалитетнија знања и испољити више упорности ради издржавања у раду и тачности до краја. Тако, на пример, ако треба решити једначину $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$ онда, при „толерисању“ импликација, решавање може да тече на следећи начин:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5 <\equiv> \sqrt{x-3}=5-\sqrt{x+2} \Rightarrow (\sqrt{x-3})^2=(5-\sqrt{x+2})^2$$
$$\Rightarrow x-3=25-10\sqrt{x+2}+x+2 <\equiv> 10\sqrt{x+2}=30 <\equiv> \sqrt{x+2}=3$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x+2})^2=3 \Rightarrow x+2=9 <\equiv> x=7;$$

заменом x са 7 у полазној једначини (непосредна провера), добијамо једнакост $\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$, која је тачна. На тај начин, скуп $S=\{7\}$ је скуп (свих) решења полазне једначине.

Ако би се, међутим, радило само са еквиваленцијама, онда би решавање посматране једначине могло да тече на следећи начин:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5 &<\equiv> \sqrt{x-3}=5-\sqrt{x+2}\\ &<\equiv> x-3\geqslant 0\wedge x+2\geqslant 0\wedge 5-\sqrt{x+2}\geqslant 0\wedge(\sqrt{x-3})^2=(5-\sqrt{x+2})^2\\ &<\equiv> x\geqslant 3\wedge\sqrt{x+2}\leqslant 5\wedge\sqrt{x+2}=3\\ &<\equiv> x\geqslant 3\wedge(\sqrt{x+2})^2\leqslant 5^2\wedge(\sqrt{x+2})^2=3^2\\ &<\equiv> x\geqslant 3\wedge x+2\leqslant 25\wedge x+2=9\\ &<\equiv> x\geqslant 3\wedge x\leqslant 23\wedge x=7\\ &<\equiv> x=7.\end{aligned}$$

У овом случају, без икакве провере, закључујемо да је $S=\{7\}$ скуп (свих) решења посматране једначине, али није оправдано очекивати од свих ученика у наставном процесу да раде на овом нивоу.

Колико је важно не сводити решавање задатака само на механичке и техничке поступке изразито показује пример решавања једначине из књиге *Справочник по элементарной математике* (М. Я. Выгодский, стр. 131). Полазећи од једначине

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)^2}{x(x-b)}+\frac{(x-b)^2}{x(x-a)}=3,$$

израчунавањем збира на левој страни, ослобађањем од разломака, па затим и заграда, раздвајањем познатих и непознатих и издавајањем заједничког чиниоца (непознате x), налажењем непознате и скраћивањем добијеног разломка са x, добија се (у поменутој књизи) $x=\dfrac{a+b}{3}$ као „решење“ посматране једначине. О некој провери добијеног резултата и раду са еквиваленцијама у тој књизи нема ни говора! А колико недостатак остељивости и критичког односа у том случају имају негативне последице показује специјалан случај $a=b=0$. У том случају једначина гласи

$$\frac{x^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}=3$$

па је тада њено решење сваки број $x\neq 0$, а по наведеној књизи број $x=0$ је тада једино њено решење!

5. Коришћење расположивог апарата и значај знања елементарне математике

У новије време, многи курсеви математике почињу са елементима математичке логике и теорије скупова. У оквиру тога често се дају и обимна и продубљена излагања и раде озбиљнији задаци. Преласком на нове области, међутим, готово да се заборави шта је и како раније речено, тако да се, практично, не види место, улога и могућности примене знања из математичке логике и теорије скупова. Захваљујући и томе, дешава се да су ученици и студенти у стању да реше и неки сложенији задатак из математичке логике, али не и неки једноставан задатак из елементарне математике, као што је, на пример неједначина $\dfrac{1}{x+1} < 1$.

Залажемо се, дакле, за поступност у стицању и учвршћивању знања, тј. за „освајање“ прво знања нижег нивоа сложености, па потом знања вишег нивоа сложености, као и за систематско и доследно коришћење претходних знања у „суочавању“ са новом проблематиком и њеним феноменима. А кад је реч о елементима логике и теорије скупова и још неким фундаменталним математичким областима, мишљења смо да ту не треба ићи много широко и дубоко (осим кад је реч о математичким усмерењима) и да тежиште треба ставити на употребне (оперативне) вредности знања из тих области, у смислу систематизације излагања, побољшања његове прегледности, јасноће, скраћивања и поједностављења решења и доказа.

Овде дајемо један занимљив и ефикасан пример функционалне улоге знања из основа математике. Реч је о примени следећег става:

(∗) Нека је $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i = \top$, $(\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\})\, i \neq j \;\Rightarrow\; q_i \wedge q_j = \bot$ и $(\forall i \in \{1,2,\dots,n\})\, p_i \;\Rrightarrow\; q_i$. Тада важи $(\forall i \in \{1,2,\dots,n\})\, q_i \;\Rrightarrow\; p_i$.

Примену тог става илустроваћемо на дискусији решења система две линеарне алгебарске једначине са две непознате:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Посматрајмо следеће исказе:

$$p_1 : D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$p_2 : \left(D = 0 \wedge \left(D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)\right) \vee (a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0 \wedge (c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0));$$

$$p_3 : D = 0 \wedge (D_1 = D_2 = 0) \wedge (a_1 \neq 0 \vee b_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee b_2 \neq 0);$$

$$p_4 : (a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0) \wedge (c_1 = c_2 = 0);$$

q_1: систем је одређен (тј. има само једно решење); q_2: систем је противуречан (тј. нема решења); q_3: систем је неодређен са једном слободном непознатом (тј. систем има бесконачно много решења, која се добијају слободним избором вредности једне непознате и израчунавањем вредности друге); q_4: систем је неодређен са обе слободне непознате (тј. сваки уређен пар реалних бројева је његово решење). При томе имамо: $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 = \top$; $q_i \wedge q_j = \bot$ за свако $i,\ j \in \{1,2,3,4\}$ такво да је $i \neq j$; $(\forall i \in \{1,2,3,4\})\, p_i \;\Rrightarrow\; q_i$. На основу става (∗), важи и $(\forall i \in \{1,2,3,4\})\, q_i \;\Rrightarrow\; p_i$. Специјално, на пример, важи: ако је посматрани систем неодређен и са једном слободном непознатом, онда је $D = 0 \wedge (D_1 = D_2 = 0) \wedge (a_1 \neq 0 \vee b_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee b_2 \neq 0)$.

Наше је мишљење да је добро познавање елементарне математике изванредно значајно за успешан „ход“ кроз „просторе“ више математике. Чињеница је, наиме, да се решавање многих проблема више математике своди на решавање проблема из елементарне математике: решавање једначина, неједначина и сл. Пажњу свакако заслужује и питање шта је (или: где је) граница између елементарне и више математике. По том питању, у разним областима математике, мишљења су углавном подељена, али када је реч о математичкој анализи претежно се сматра да су лимеси граница између елементарне и више математике у тој области.

У области елементарне математике, опет, нарочито је важно добро познавање основних елементарних функција, како због значаја истих за праксу, тако и због њихове улоге у формирању елементарних функција уопште. Међу основним елементарним функцијама, пак, посебну пажњу треба посветити степеним функцијама са рационалним изложиоцима, због тога што се све њихове особине могу испитати средствима елементарне математике и што се помоћу (на основу) њих могу дефинисати (и испитати) степене функције са ирационалним изложиоцима.

У вези са основним елементарним функцијама треба такође истаћи да познавање једних, на пример експоненцијалних (тригонометријских) функција, аутоматски може да значи познавање њима (или њиховим рестрикцијама) инверзних функција, логаритамских (аркус-) функција, само ако се зна да су графици полазне функције $y = f(x)$ и њој инверзне функције $y = f^{(-1)}(x)$ симетрични у односу на праву $y = x$ (тј. у односу на симетралу I и III квадранта). У складу са тим, истичемо такође да је са сваком степеном функцијом $y = x^{p/q}$ (p – цео број, q – природан број) практично испитана и њој инверзна (степена) функција $y = x^{q/p}$.

На основу реченог, може се закључити да познавање и успешно коришћење знања елементарне математике, а у том контексту познавање основних и елементарних функција уопште, сматрамо важним показатељем квалитета излагања и знања математичких садржаја.

6. Досетљивост и сналажљивост и мисаоно решавање задатака

У решавању математичких проблема често постоји нека уобичајена и стандардна процедура која сигурно, али понекад споро, компликовано и отежано доводи до резултата. Тако, на пример, ако треба испитати да ли је сложен исказ $P \implies Q$ таутологија, онда би стандардни пут решавања тог проблема могао бити формирање истин(ит)осне таблице за исказ $P \implies Q$ и увид у то да ли је у последњој колони (испод $P \implies Q$) на сваком месту $\top$, или то није случај. То, међутим, може да буде спор и „кабаст“ посао, а није искључена ни могућност случајне грешке, па тиме и погрешност закључка. Отуда је увек оправдано питање да ли се посматрани проблем може решити брже и лакше, на неки други начин. У томе до пуног изражаја долазе способности појединца, које су познате као досетљивост и сналажљивост и које објективно представљају јасан знак квалитета знања и значајних потенцијалних могућности. Како то практично изгледа, илустроваћемо са неколико примера.

У поменутом случају, ако установимо да не може истовремено P бити истинито и Q лажно (тј. да је и Q истинито када је P истинито), можемо одмах закључити да је $P \implies Q$ таутологија. Тако, на пример, исказ $p \implies (q \implies (p \wedge q))$ је таутологија, зато што би тачност p и нетачност $q \implies (p \wedge q)$ значили тачност p и q и нетачност $p \wedge q$, што је контрадикција. Отуда имамо $p \Rrightarrow (q \implies (p \wedge q))$ („$\Rrightarrow$“ је ознака логичке импликације). Исто тако, лако се утврђује да је $((p \implies q) \wedge p) \implies q$ таутологија, тј. да важи $((p \implies q) \wedge p) \Rrightarrow q$. Заиста, ако је $(p \implies q) \wedge p$ тачно, онда је тачно и $p \implies q$ и p, па мора бити тачно и q (ако би q било нетачно, онда би $p \implies q$ било нетачно, што није).

Узмимо да треба решити тригонометријску једначину $\sin^2 2x + \cos 3x = 2$. Стандардни поступак овде би био да се користе тригонометријски идентитети $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4(1-\cos^2 x)\cos^2 x = 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, чиме се проблем своди на решавање једначине $4\cos^2 x - 4\cos^4 x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 2$. Имамо, дакле, једначину четвртог степена (по $\cos x$), чије решавање не мора бити (и није) једноставно. Међутим, ако се досетимо да је највећа вредност $\sin^2 2x$ једнака 1, исто као и $\cos 3x$, закључујемо да је $\sin^2 2x + \cos 3x = 2 <\!\equiv\!> \sin^2 2x = 1 \wedge \cos 3x = 1$ (где је „$<\!\equiv\!>$“ знак логичке еквиваленције) $<\!\equiv\!> (\sin 2x = -1 \vee \sin 2x = 1) \wedge \cos 3x = 1 <\!\equiv\!> (\sin 2x = -1 \wedge \cos 3x = 1) \vee (\sin 2x = 1 \wedge \cos 3x = 1)$. Релативно лако се сада показује да ниједан од добијених система нема решења, а одатле се закључује да полазна једначина нема решења.

Ако, на пример, треба наћи реална решења једначине $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$, онда би стандардан поступак решавања текао на следећи начин. Нека је x_0 произвољно изабран, па фиксиран, реалан број. Тада је уређен пар $\langle x_0, y_0 \rangle$ решење посматране једначине ако и само ако је y_0 решење једначине $x_0^2 + y^2 + 2x_0 - 2y + 2 = 0$. Одатле се добија $y = 1 \pm \sqrt{-(x_0+1)^2}$, па је видљиво да је y реално ако и само ако $x_0 + 1 = 0$, односно $x_0 = -1$, када добијамо $y = 1\,(= y_0)$. На тај начин, $\langle -1, 1 \rangle$ је једино решење посматране једначине. Иначе, ако се досетимо да је $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ и $y^2-2y+1 = (y-1)^2$, онда се наша једначина може написати у облику $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$. Имајући у виду да за $a, b \in \mathbf{R}$ важи $a^2 + b^2 = 0 <\!\equiv\!> a = 0 \wedge b = 0$, закључујемо да је посматрана једначина тачна ако и само ако је $x+1 = 0 \wedge y-1 = 0$, односно $x = -1\,(= x_0) \wedge y = 1\,(= y_0)$.

На крају, узмимо да треба решити једначину $e^x - x - 1 = 0$. Реч је о трансцендентној једначини, за коју не постоји нека општа метода тачног решавања. Отуда се морамо некако снаћи, како бисмо дошли до информације да ли наша једначина уопште има решења, ако их има — колико је решења и најзад, како наћи сва решења или како добити та решења са произвољно задатом тачношћу. Један од начина за решавање тог проблема може да буде коришћење чињенице да је дата једначина еквивалентна једначини $e^x = x + 1$ и графичко приказивање функција $y_1 = e^x$ и $y_2 = x + 1$ (које се у одређеном школском узрасту цртају напамет) у истом координатном систему xOy. Са слике се види да је $x = 0$ једино решење посматране једначине. Други начин решавања посматране једначине може да буде цртање графика функције $y = e^x - x - 1$ и уочавање апсциса тачака у којима тај график сече апсцисну осу. (Те апсцисе су решења посматране једначине.) У овом примеру могли смо и без цртања графика функција $y_1 = e^x$ и $y_2 = x + 1$ „видети“ да је $x = 0$ апсциса њихове заједничке тачке $\langle 0, 1 \rangle$.

Веома ценимо када постоје могућности мисаоног решавања задатака (дакле, без папира и оловке, без техничких средстава, без цртежа итд.) и то сматрамо важним показатељем квалитета знања. Мишљења смо да за таквим способностима постоји потреба (ако ништа друго, то убрзава решавање проблема), као и да су могућности ученика и студената у том погледу далеко веће него што то пракса показује. Верујемо, наиме, да се усмеравањем према томе и доследним инсистирањем на томе могу постићи значајни резултати на плану мисаоног решавања проблема (наравно, једноставнијих и лакших). Свакако да претходно искуство може доста да помогне у мисаоном решавању проблема и уверени смо да напори у том смислу морају да дају одређене резултате. Иначе, инсистирање на повећаним мисаоним активностима у решавању математичких проблема је, по нашем мишљењу, природан захтев, зато што је и сама математика пре свега и највише рад мислима и што и проблеми и њихова решења треба да се зачну у мислима, односно мисаоно разреше, а остало је ствар технике. Што се искуства тиче, треба храбро и истрајно приступати решавању математичких проблема; успех у томе ствара добре претпоставке за даље успехе.

РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАР '96

Традиционални Републички семинар Друштва математичара Србије о настави математике и рачунарства у основној школи, у средњим школама, на вишим школама и на факултетима, укључен у „Јануарске дане просветних радника Србије '96", одржан је под покровитељством Министарства просвете Србије а успешни организатори су били Подружница Ниш Друштва математичара и Филозофски факултет Ниш. Семинар је одржан 18. и 19. јануара 1996. године у Нишу, у просторијама Дома Војске Југославије (пленарна седница) и салама Студијске групе за математику Филозофског факултета.

Рад се одвијао у оквиру три секције:

- секција за наставу математике и рачунарства у старијим разредима основне школе;
- секција за наставу математике и рачунарства у средњим школама;
- секција за наставу математике и рачунарства на вишим школама и на факултетима.

Учествовало је око 540 наставника и професора математике и рачунарства а одржано је укупно 46 предавања, од чега два пленарна (др Стојан Богдановић „О настави математике" и др Милан Туба „Стање информатике код нас"), округли сто на тему „Проблеми оцењивања у основној школи", дискусија о корекцијама наставних програма математике у основној школи и проблемима њихове реализације и презентација часописа у издању Друштва математичара Србије. Активно су у раду Семинара учествовали представници Друштва математичара и физичара Црне Горе и представници Друштва математичара Републике Српске.

Успешан стручни рад и изванредна атмосфера на Семинару показатељ су да је Ниш био добар домаћин а колеге математичари града Ниша веома добри организатори овог скупа.