Драгољуб Јовановић

ПРИМЕР МЕТОДИЧКОГ ПРИСТУПА ИЗГРАДЊИ ПОЈМА ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ НИЗА

Увод

С обзиром на суптилност појма граничне вредности низа природно је да ће тај појам ученици тешко прихватити уколико не буду адекватно припремани за то. Овај рад представља покушај поступног увођења појма граничне вредности низа, при чему се на крају долази до коректне и за ученике прихватљиве дефиниције тог појма.

Уобичајено је да ученици претходно овладају појмом ε-околине неког броја и значењем исказа „готово сви чланови низа (a_n) су у ε-околини броја a". По идеји професора М. Марјановића, корисно је да се пре наведених појмова ученици упознају и са следећим појмовима: ограниченост низа, горње (доње) ограничење низа, готово горње (доње) ограничење низа. Ово последње би олакшало прихватање појма ε-околине и разумевање исказа: „у произвољној ε-околини броја a су готово сви чланови низа".

Претпостављамо да су ученици на претходним часовима дефинисали низ као пресликавање $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ и упознали се са појмом монотоног низа. Већ у том делу, приликом давања примера разних низова, требало би употребљавати израз „готово сви".

Пример 1. Кад наводимо пример константног низа, на пример $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$, можемо навести и низ $(b_n) = (4, 3, 2, 1, 1, 1, \dots)$ или, уопште, $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m, a, a, a, \dots)$ за које можемо рећи да су „готово константни". Притом наглашавамо да то значи да, евентуално, само коначно много чланова низа нису једнаки константи a, док су сви остали једнаки константи a. Да бисмо проверили да ли су ученици усвојили појам, дајемо пример

$$(a_n) = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{100 \text{ пута}}, 2, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{100 \text{ пута}}, 3, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{100 \text{ пута}}, 4, 1, 1, \dots)$$

у којем се после сваких 100 јединица појављује нов природан број различит од 1. Може се очекивати да ће неки од ученика тврдити да је оавј низ „готово константан". Тада треба поставити питање: Да ли чланова низа различитих од 1 има коначно или бесконачно много? Када ученик уочи да и таквих чланова низа има бесконачно много, схватиће да није испуњен услов да само коначно много чланова низа није једнако 1, што значи да низ није готово константан.

Саопштено на Колоквијуму о настави математике, Математички факултет, Београд

Пример 2. Када дајемо примере монотоних низова, рецимо $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$, који је строго опадајући, или $(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right)$, који је строго растући, можемо навести и овакав пример: $(c_n) = \left(3, 2, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$, где за $n \geqslant 5$ важи $c_n = \dfrac{n-4}{n-3}$. За овај низ се види да је почев од петог члана строго растући, па пошто то својство не важи за прва четири члана (дакле, за коначно много чланова), кажемо да је низ (c_n) готово строго растући.

На овом месту треба указати на разлику у дефиницијама појмова монотоног и готово монотоног низа. У случају строгог растења имамо дефиниције:

Низ (a_n) је строго растући ако важи

$$(\forall n \in \mathbf{N})\, a_n < a_{n+1}.$$

Низ (a_n) је готово строго растући ако

$$(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, (\forall n \geqslant n_0)\, a_n < a_{n+1}.$$

Наравно, аналогно важи и за: растуће и готово растуће, опадајуће и готово опадајуће, строго опадајуће и готово строго опадајуће низове. Дакле, оно што важи за свако $n \in \mathbf{N}$ у првом случају, у другом важи почев од неког $n_0 \in \mathbf{N}$. Примећујемо да се за $n_0 = 1$ друга дефиниција своди на прву, па је монотон низ уједно и готово монотон.

Пример 3. Испитати монотоност низа датог формулом општег члана $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

Како су чланови низа позитивни, можемо посматрати количник $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ и упоређивати га са 1. Имамо

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{10^n}{n!}}{\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{10}.$$

Ако је $n \geqslant 10$, онда је $n+1 > 10$, тј. $\dfrac{n+1}{10} > 1$, па је за све $n \geqslant n_0 = 10$ испуњено $a_n > a_{n+1}$. Дати низ је готово строго опадајући.

1. Ограниченост низа

Пример 4. Посматрајмо низ (a_n) дат са $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Примећујемо да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$. Другим речима, сваки члан датог низа је мањи од 2, осим првог члана, који је једнак броју 2. Кажемо да је низ (a_n)

ограничен са горње стране (или ограничен одозго) и да је број 2 једно његово *горње ограничење*. Наравно, горње ограничење датог низа је и било који број већи од 2.

Слично, важи $1+\dfrac{1}{n}>1$ за свако $n\in\mathbf{N}$, тј. сваки члан датог низа већи је од 1, па за тај низ кажемо да је ограничен са доње стране (или одоздо), а број 1 је једно његово *доње ограничење*. Доња ограничења су, на пример, и бројеви: 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{8}$, -2, -5 итд, односно сви бројеви мањи од 1.

Уводимо следеће дефиниције:

Низ (a_n) је ограничен одозго (или са горње стране) ако

$$(\exists M\in\mathbf{R})(\forall n\in\mathbf{N})\,a_n\leqslant M;$$

низ (a_n) је ограничен одоздо (или са доње стране) ако

$$(\exists m\in\mathbf{R})(\forall n\in\mathbf{N})\,m\leqslant a_n;$$

низ (a_n) је ограничен ако је ограничен и одозго и одоздо, тј. ако важи

$$(\exists m\in\mathbf{R})(\exists M\in\mathbf{R})(\forall n\in\mathbf{N})\,m\leqslant a_n\leqslant M.$$

У посматраном примеру можемо рећи да је од свих горњих ограничења „најбоље“ оно које нам најпрецизније описује докле се чланови низа простиру удесно на бројној оси. У датом примеру то је број 2, и он је најмањи од свих горњих ограничења. Зато се зове *најмање горње ограничење* или *супремум* низа (a_n), а означава са $\sup a_n$.

Слично, од свих доњих ограничења највише нам о посматраном низу говори број 1, који представља *највеће доње ограничење* или *инфимум* низа (a_n) и означавамо га са $\inf a_n$.

У овом примеру број 2 је члан низа, док број 1 не припада низу, па важи $1<a_n\leqslant 2$ за свако $n\in\mathbf{N}$. Према томе, интервал $(1,2]$ је најмањи интервал који садржи све чланове посматраног низа (a_n).

У вези са истим низом умесно је поставити питање: шта је скуп свих горњих, а шта скуп свих доњих ограничења низа? На ово питање ученици треба сами да дају одговор ($[2,+\infty)$ и $(-\infty,1]$).

Пример 5. Посматрајмо сада низ (a_n) дат са $a_n=\dfrac{n+3}{n+1}$. Да ли је тај низ ограничен?

Решење. 1° $\dfrac{n+3}{n+1}=\dfrac{n+1+2}{n+1}=1+\dfrac{2}{n+1}>1$ за свако $n\in\mathbf{N}$, што значи да је дати низ ограничен одоздо и да је број 1 једно његово доње ограничење.

2° $\dfrac{n+3}{n+1}<\dfrac{n+3}{n}=1+\dfrac{3}{n}\leqslant 4$ за свако $n\in\mathbf{N}$, што значи да је низ ограничен одоздо и да је број 4 једно његово горње ограничење.

3° Пошто важи $(\forall n\in\mathbf{N})$ $1<a_n<4$, низ (a_n) је ограничен.

У вези са овим низом постављају се питања:

а) да ли је интервал $(1,4)$ најмањи интервал који садржи све чланове низа;

б) шта је скуп свих горњих, а шта скуп свих доњих ограничења датог низа?

На ова питања ученици сами, или уз малу помоћ наставника, могу да дају одговоре. Наиме, из $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$ лако се закључује да је $\frac{n+3}{n+1}$ највеће када n узима најмању вредност, тј. за $n = 1$, па је $a_1 = 1 + \frac{2}{1+1} = 2$ супремум низа (a_n).

Слично, вредност израза $1 + \frac{2}{n+1}$ је утолико мања уколико је n веће, па ако се n неограничено увећава, израз $1+\frac{2}{n+1}$ остаје увек већи од 1, али се од 1 разликује произвољно мало. Закључујемо да је број 1 највеће доње ограничење, тј. $\inf a_n = 1$. Према томе, одговор на питање под а) је негативан. Најмањи интервал у коме су сви чланови низа је $(1, 2]$.

б) Из одговора на претходно питање директно следи да је скуп свих горњих ограничења датог низа интервал $[2, +\infty)$, а скуп свих доњих ограничења интервал $(-\infty, 1]$.

2. Готово горње (доње) ограничење низа

Пример 6. Посматрајмо низ (a_n) дат са $a_n = \frac{1}{n}$. Шта је скуп свих горњих ограничења низа (a_n)?

То је очигледно скуп $[1, +\infty)$. Уочимо сада, на пример, број $\frac{1}{100}$. То није горње ограничење посматраног низа, јер су неки чланови тог низа ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{99}$) већи од $\frac{1}{100}$, али сви чланови низа, почев од $\frac{1}{101}$ су мањи од $\frac{1}{100}$ (односно, почев од $\frac{1}{100}$ нису већи од $\frac{1}{100}$). Стога можемо рећи да је $\frac{1}{100}$ горње ограничење за готово цео низ (a_n), или краће да је $\frac{1}{100}$ готово горње ограничење низа (a_n).

Уопште, кажемо да је реалан број a *готово горње ограничење* низа (a_n) ако важи

$$(\exists m \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geqslant m \implies a_n \leqslant a).$$

У датом примеру броју a из ове дефиниције одговара $\frac{1}{100}$, а броју m број 100. Кад год је индекс n члана низа a_n једнак или већи од 100, биће $a_n \leqslant \frac{1}{100}$.

Сада поставимо питање: да ли је 0,001 готово горње ограничење низа (a_n) датог са $a_n = \frac{1}{n}$?

Да бисмо одговорили на ово питање, тражимо природан број m, такав да је $a_n \leqslant 0{,}001$ кад год је $n \geqslant m$. Имамо

$$a_n = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{1000} \iff n \geqslant 1000.$$

Према томе, $n \geqslant 1000 \implies \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{1000}$, па је $m = 1000$ и број 0,001 представља готово горње ограничење датог низа, тј. десно од броја 0,001 на бројној оси налази се коначно много чланова низа $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{999})$, па су готово сви лево од броја 0,001.

На сличан начин уводимо и појам готово доњег ограничења. Број b је *готово доње ограничење* за низ (a_n) ако важи

$$(\exists m \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geqslant m \implies a_n \geqslant b).$$

Пример 7. За низ (a_n), дат са $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$, једно готово доње ограничење је, на пример, број $2\frac{9}{10}$, јер важи

$$\begin{aligned} n \geqslant 10 &\implies \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10} \implies -\frac{1}{n} \geqslant -\frac{1}{10} \\ &\implies 3 - \frac{1}{n} \geqslant 3 - \frac{1}{10} \implies 3 - \frac{1}{n} \geqslant 2\tfrac{9}{10}. \end{aligned}$$

Дакле, $m = 10$ и $n \geqslant m \implies a_n \geqslant b = 2\frac{9}{10}$. Исто тако, готово доња ограничења за дати низ су, на пример, и бројеви $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{8}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$, $2\frac{5}{6}$, $2\frac{6}{7}$ итд. Скуп свих готово доњих ограничења је интервал $(-\infty, 3)$, јер важи

$$n \geqslant m \implies \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m} \implies -\frac{1}{n} \geqslant -\frac{1}{m} \implies 3 - \frac{1}{n} \geqslant 3 - \frac{1}{m}.$$

Отуда за $n \geqslant m$ важи

$$3 - \frac{1}{m} \geqslant b \implies 3 - \frac{1}{n} \geqslant b,$$

па $b \in (-\infty, 3)$.

Пример 8. Посматрајмо низ (a_n) дат формулом општег члана $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

Одредимо неколико првих чланова и представимо их на бројној оси. Добијамо редом

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1, & a_2 = 1 - \dfrac{1}{2} = a_1 - \dfrac{1}{2}, & a_3 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = a_2 + \dfrac{1}{3}, \\ a_4 = a_3 - \dfrac{1}{4}, & a_5 = a_4 + \dfrac{1}{5}, & a_6 = a_5 - \dfrac{1}{6}, \quad \dots \end{array}$$

Са бројне осе видимо да је $a_2 < a_4 < a_6$ и наслућујемо да је $a_{2n} < a_{2n+2}$ за свако n. Исто тако, видимо да је $a_1 > a_3 > a_5$ и наслућујемо да је $a_{2n-1} > a_{2n+1}$ за свако n. Но, ово је лако и доказати.

Наиме, из претходног одређивања чланова низа, на основу дефиниције низа, излази

$$a_{2n+2} = a_{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = a_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = a_{2n} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

а одавде

$$a_{2n+2} > a_{2n} \qquad \text{за свако } n. \tag{1}$$

Ово значи да је подниз датог низа са парним индексима строго растући.

Слично важи

$$a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{2n+1} = a_{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = a_{2n-1} - \frac{1}{2n(2n+1)},$$

а одавде

$$a_{2n+1} < a_{2n-1} \qquad \text{за свако } n, \tag{2}$$

што значи да је подниз датог низа са непарним индексима строго опадајући.

Даље, из $a_{2n+1} = a_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$ излази

$$a_{2n} < a_{2n+1} \qquad \text{за свако } n. \tag{3}$$

Сада, на основу (1), (2) и (3) закључујемо да за сваки природан број n важи

$$a_2 < a_4 < a_6 < \cdots < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1} < \cdots < a_3 < a_1. \tag{4}$$

Уколико се n повећава, разлика $a_{2n+1} - a_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ постаје све мања, али је увек $a_{2n} < a_{2n+1}$. На основу (4) можемо рећи да је, на пример, a_{2n+1}, за било које n, готово горње ограничење датог низа, јер само коначно много чланова низа (a_n) лежи десно од a_{2n+1}.

Слично, a_{2n} је, за било које n, готово доње ограничење низа (a_n), јер само коначно много чланова низа (a_n) лежи лево од a_{2n}. Наравно, и сваки број већи од a_{2n+1}, за било које n, је готово горње ограничење, као што је и сваки број мањи од a_{2n}, за било које n, готово доње ограничење датог низа (a_n).

Питање 1. Да ли је број $b = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{25}$ готово горње ограничење датог низа?

На основу доказаног сви чланови низа (a_n) са парним индексима су мањи од b, а чланови са непарним индексима мањи су од b ако је $n > 25$. Према томе, десно од b су само чланови низа са индексима 1, 3, 5, … , 23. Дакле, b јесте готово горње ограничење датог низа.

Питање 2. Да ли је број $c = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots - \dfrac{1}{48}$ готово доње ограничење датог низа?

Сви чланови низа са непарним индексима су десно од c, а десно од c су и они чланови са парним индексима чији је индекс већи од 48. Према томе, лево од c има само коначно много чланова низа. То су $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{46}$. Дакле, број c јесте готово доње ограничење датог низа.

3. Појам граничне вредности низа — интуитивни приступ

Полазимо од следећег примера.

Пример 9. Дати су низови

$$\text{a)}\quad a_n=\frac{1}{n},\qquad \text{b)}\quad a_n=\frac{(-1)^n}{n},\qquad \text{c)}\quad a_n=1+\frac{(-1)^n}{n},$$

$$\text{d)}\quad a_n=2^n,\qquad \text{e)}\quad a_n=(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Наћи неколико првих чланова низа, а затим проценити постоји ли број коме се приближава a_n кад n неограничено расте. Постоји ли такав број за сваки од датих низова?

Решење. a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$, или на бројној оси као на слици a). Примећујемо да су сви чланови низа позитивни бројеви и да је сваки следећи све мањи. Наслућујемо да се a_n приближава нули кад се n неограничено увећава и пишемо

$$a_n\to 0\quad \text{кад}\quad n\to\infty$$

(читамо: a_n тежи нули кад n тежи бесконачности).

a) b)

На бројној оси то значи да се тачка a_n приближава тачки 0 кад се индекс n члана a_n низа (a_n) увећава, односно да се растојање између тачака a_n и 0 смањује и постаје по вољи мало ако је индекс n члана a_n довољно велики. Другим речима, разлика бројева a_n и 0 по апсолутној вредности постаје по вољи мала кад индекс n члана a_n постане довољно велики.

b) $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \dots$, в. слику b). Уочавамо да је сваки следећи члан низа са супротне стране од нуле у односу на претходни, али је ближе нули. Заправо, постоје два подниза:

$$-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\dots\qquad \text{за } n=1,\,3,\,5,\,7,\,\dots$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\dots\qquad \text{за } n=2,\,4,\,6,\,8,\,\dots$$

У оба случаја важи $a_n\to 0$ кад $n\to\infty$.

c) $0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{6}{7},\ \dots$, в. слику c). Слично као у претходном примеру, овде је сваки следећи члан са супротне стране броја 1 у односу на претходни, али је ближе броју 1. И овде уочавамо два подниза:

$$0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots \qquad \text{за } n = 1, 3, 5, 7, \dots$$
$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots \qquad \text{за } n = 2, 4, 6, \dots$$

Први подниз је растући, али, пошто је бројилац увек за 1 мањи од имениоца, сваки члан је мањи од 1. Сваки следећи члан ближи је броју 1, а разлика броја 1 и произвољног члана тог подниза може се учинити онолико малом колико то желимо. Треба само узети да је n довољно велики број.

Други низ је опадајући, али је сваки његов члан већи од 1, а сваки следећи је ближи јединици. Дакле, у оба случаја видимо да

$$a_n \to 1 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

c) e)

d) 2, 4, 8, 16, 32, … . Кад n неограничено расте, тада и члан $a_n = 2^n$ неограничено расте.

e) $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$, слика e). Овде имамо два подниза:

$$-2, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, \dots \qquad \text{за } n = 1, 3, 5, 7, \dots$$
$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8} \dots \qquad \text{за } n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

Први низ је растући и сваки следећи члан ближи је броју -1, а други је опадајући и сваки следећи члан ближи је броју 1.

У случајевима a), b), c) тражени бројеви постоје и зовемо их граничним вредностима датих низова, а такве низове зовемо конвергентним. Остала два низа су дивергентни.

На овај начин ученици интуитивно стичу појам граничне вредности низа, а и појмови монотоности и ограничености низа постају им ближи и јаснији.

4. Појам ε-околине неког броја

У циљу прецизнијег дефинисања појма граничне вредности низа, уводимо појам ε-околине неког броја a као интервал

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{\, x \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \,\}$$

дужине 2ε (ε је позитивна реалан број), в. прву слику на следећој страни.

Нека сада неки члан низа (a_n) припада ε-околини броја a, тј. нека $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Поставимо питање: које је највеће растојање броја (тачке) a_n од броја (тачке) a?

Ученици са друге од претходних слика морају да уоче да то растојање не прелази величину ε, тачније, увек је мање од ε. Дакле, $|a_n - a| < \varepsilon$, а ово значи исто што и $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, тј. важи

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \iff |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ово је важно да се схвати да би се разумело оно што следи.

Питање 1. Посматрајмо ε-околину броја a. Нека је $a+\varepsilon$ готово горње ограничење низа (a_n). Шта се може рећи за чланове низа (a_n)?

Питање 2. Нека је $a-\varepsilon$ готово доње ограничење низа (a_n). Шта се може тврдити за чланове низа (a_n)?

Питање 3. Нека је $a+\varepsilon$ готово горње и $a-\varepsilon$ готово доње ограничење низа (a_n). Шта се може тврдити за чланове низа (a_n)?

Одговоре на постављена питања требало би да дају сами ученици.

Одговор 1. Десно од $a+\varepsilon$ има само коначно много чланова низа (a_n).

Одговор 2. Лево од $a-\varepsilon$ има само коначно много чланова низа (a_n).

Одговор 3. С обзиром на претходна два одговора, у ε-околини броја a су готово сви чланови низа (a_n).

Задатак. За низове из примера 9 a), b), c) узети за ε вредности 0,1; 0,01; 0,001; 0,000001, па одредити колико се чланова низа налази у ε-околини тачке a (где је a гранична вредност низа), а колико ван ње.

Решење. Узмимо као пример задатак под c), тј. низ дат са $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Овде је $a = 1$.

1° $\varepsilon = 0{,}1$. Тада је $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (0{,}9\,;\,1{,}1)$.

$a_9 = 1 - \dfrac{1}{9} < 1 - \dfrac{1}{10} = 0{,}9$, па $a_9 \notin (0{,}9\,;\,1{,}1)$;

$a_{10} = 1 + \dfrac{1}{10} = 1{,}1 \notin (0{,}9\,;\,1{,}1)$;

$a_{11} = 1 - \dfrac{1}{11} > 1 - \dfrac{1}{10} = 0{,}9$ и $1 - \dfrac{1}{11} < 1{,}1$, па $a_{11} \in (0{,}9\,;\,1{,}1)$;

$a_{12} = 1 + \dfrac{1}{12} < 1 + \dfrac{1}{10}$, а $1 + \dfrac{1}{12} > 0{,}9$, па $a_{12} \in (0{,}9\,;\,1{,}1)$.

Слично закључујемо да a_{13}, a_{14}, $\ldots$ припадају интервалу $(0{,}9\,;\,1{,}1)$.

Ван ε-околине броја 1 (за $\varepsilon = 0{,}1$ можемо рећи 0,1-околине) налази се првих 10 чланова низа, а сви остали (са индексом $n > 10$) су у ε-околини броја 1. Дакле, готово сви чланови низа су у ε-околини броја 1.

Исти резултат добијамо и користећи горњу еквиваленцију. На пример, за a_{11} имамо

$$|a_{11}-1| = \left|\left(1-\frac{1}{11}\right)-1\right| = \left|-\frac{1}{11}\right| = \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = \varepsilon, \quad \text{па } a_{11} \in (0{,}9\,;\,1{,}1).$$

За произвољан члан низа (a_n) имаћемо да је

$$|a_n - a| = \left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| = \frac{1}{n} < 0{,}1 \quad \text{за } n > \frac{1}{0{,}1}, \text{ тј. за } n > 10.$$

Дакле,

$$n > 10 \implies |a_n - 1| < 0{,}1 = \varepsilon.$$

2° $\varepsilon = 0{,}01$. Понављајући претходни поступак (нека ученици то ураде!), добијамо да

$$|a_n - a| = \left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| = \frac{1}{n} < 0{,}01 \quad \text{за } n > \frac{1}{0{,}01}, \text{ тј. за } n > 100.$$

Дакле, сви чланови низа са индексом $n > 100$ су у 0,01-околини броја 1, па важи

$$n > 100 \implies |a_n - 1| < 0{,}01 = \varepsilon.$$

3° На исти начин закључујемо да се ван 0,001-околине броја 1 налази 1000 чланова низа, а сви преостали су у 0,001-околини броја 1, тј.

$$n > 1000 \implies |a_n - 1| < 0{,}001 = \varepsilon.$$

За $\varepsilon = 0{,}000001$ закључак је сличан — треба узети $n > 1\,000\,000$ да би се добило $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Питање 1. Шта ће бити за $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 2$ (исти задатак)?

1-околина броја 1 је $(0,2)$, па су у њој сви чланови низа осим a_1, дакле, готово сви. 2-околина броја 1 је $(-1,3)$ и у њој су сви чланови низа (a_n), па је и то обухваћено изразом „готово сви“.

Питање 2. Ако за исти низ (a_n), дат са $a_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$, узмемо уместо броја $a=1$ неки други број, на пример $b = 1{,}25$, да ли ће свака ε-околина броја b садржавати готово све чланове низа?

Овде се види да, на пример, за $\varepsilon = 0{,}5$ готово сви чланови низа су у ε-околини броја b. Слично је за $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 0{,}3$. Међутим, за $\varepsilon = 0{,}2$ или $\varepsilon = 0{,}1$ и увек када је $\varepsilon < 0{,}25$, готово сви чланови низа су ван такве ε-околине броја 1,25, а у тој ε-околини има их само коначно много.

Из одговора на ово питање требало би да ученици изведу одговарајући закључак. Наиме, једино за $a = 1$ важи да свака ε-околина садржи готово све чланове низа (a_n). Ван ε-околине броја 1 налази се само коначно много чланова низа, а колики је тај број зависи од величине броја ε.

Број 1 зовемо граничном вредношћу низа (a_n) датог са $a_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$, а за низ (a_n) кажемо да је конвергентан.

У задацима под a) и b) гранична вредност је 0, па се на исти начин добија

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \qquad \text{за } n > n_0(\varepsilon).$$

У општем случају важи

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{за свако } n > n_0(\varepsilon)$$

уколико је a гранична вредност низа (a_n), или другачије записано:

$$(\forall n)\,(n > n_0(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$

5. Дефиниција граничне вредности низа

Сада већ можемо да дамо прецизнију дефиницију граничне вредности низа. Тражимо од ученика да то сами покушају. У том циљу постављамо питања:

- Шта је битно за чланове низа (a_n) ако је број a гранична вредност низа?
- Где се налазе чланови низа?
- Колико их је ван произвољне ε-околине броја a, а колико у њој самој?
- Шта значи: *готово сви* или *скоро сви* чланови низа су у ε-околини броја a?

Када добијемо одговоре на ова питања, постављамо питање:

- Када је број a гранична вредност низа (a_n)?

Очекујемо овакав одговор:

Број a је гранична вредност низа (a_n) ако се у произвољној ε-околини броја a налазе готово сви чланови низа.

Затим покушавамо да ово запишемо помоћу симбола. Идемо поступно. Чињеницу $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ обично записујемо у облику $|a_n - a| < \varepsilon$. Ово важи под условом $n > n_0(\varepsilon)$, тј. ако је индекс n „довољно велики“. Дакле,

$$(\forall n)\,(n > n_0(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ово још треба допунити чињеницом да је ε произвољан позитиван број и да се за такав ε увек може наћи $n_0(\varepsilon)$, тј. „довољно велики индекс“. Према томе,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0(\varepsilon))\,(\forall n)\,(n > n_0(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$

Када је око испуњено, кажемо да је број a гранична вредност низа (a_n).

Коначно, ако уведемо за граничну вредност ознаку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, имаћемо:

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_n \;&\overset{\text{def}}{\iff}\; (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0(\varepsilon))\,(\forall n)\,(n > n_0(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0(\varepsilon))\,(\forall n > n_0(\varepsilon))\,|a_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Вратимо се сада низовима под d) и e). Код низа под d) $a_n = 2^n$ очигледно је да се у свакој ε-околини било ког броја налази само коначно много чланова низа, па је низ дивергентан.

Интересантнији је пример под е) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n}$. Ту смо уочили два подниза:

$$a_{2k} = \frac{2k+1}{2k} \qquad \text{и} \qquad a_{2k-1} = -\frac{2k}{2k-1}.$$

Ако ова два низа посматрамо одвојено, можемо рећи да први има граничну вредност 1, а други -1, јер се у свакој њиховој околини налазе готово сви чланови одговарајућег подниза. Али, ако посматрамо низ (a_n) као целину, онда он има две тачке (броја) у чијим се ε-околинама налази по бесконачно много чланова низа, али *ни у једној готово сви чланови низа*. Ово су тзв. *тачке нагомилавања низа*. Упоређујемо ова два појма: гранична вредност низа и тачка нагомилавања низа. Постављамо ученицима питање: шта је ту исто и у чему је разлика?

Очекујемо од ученика, који су претходно схватили, одговор у смислу да у оба случаја има у произвољној ε-околини бесконачно много чланова низа, а разлика је у томе што су у случају граничне вредности низа *готово сви чланови* низа у њеној произвољној ε-околини (тј. ван ε-околине само коначно много чланова низа), док у случају тачке нагомилавања тај услов *не мора* бити испуњен. Дакле, у свакој ε-околини тачке нагомилавања има бесконачно много чланова низа, а колико их је ван те околине, то није битно. Ако је, међутим, тачка нагомилавања таква да се ван сваке њене ε-околине налази само коначно много чланова низа (тј. у свакој ε-околини су готово сви), онда се ради о граничној вредности низа.

ЗАДАЦИ СА 13. БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ

1. Нека су O и G центар описаног круга и тежиште троугла ABC, редом. Ако је R полупречник описаног и r полупречник уписаног круга троугла ABC, доказати да је $OG \leqslant \sqrt{R(R-2r)}$.

2. Нека је p прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n^2 < p\}$. Ако је $p > 5$, доказати да скуп X садржи два различита елемента x и y, тако да је $x \neq 1$ и да x дели y. ($\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

3. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Означимо са M, N, P, Q, R средишта дужи AB, BC, CD, DE, EA, редом. Ако се дужи AP, BQ, CR, DM секу у истој тачки, доказати да та тачка пресека припада и дужи EN.

4. Доказати да постоји подскуп A скупа $\{1, 2, 3, \dots, 2^{1996} - 1\}$ који има следећа својства:

(а) $1 \in A$ и $2^{1996} - 1 \in A$.

(б) Сваки елемент скупа A, осим јединице, може се представити у облику збира два (не обавезно различита) броја из A.

(в) Број елемената скупа A није већи од 2012.