Слободан Диков Новчић

ДУЖИ ТРОУГЛА

Скица једног часа

1. Сјећање

Прије 35 година, на ПМФ у Београду, Еуклидску геометрију предавао ми је др Драго Лопандић. Много је полагао до језика у геометрији и тражио је од нас да се што прецизније изражавамо. Дао би нам један задатак за домаћи. Прегледао је и поправљао то што смо ми урадили. Опет је то прегледао и поправљао. Поправљао је и оно што је сам претходно написао. Говорио је да то може још строжије и да се све може исказати (записати) на више начина. Рецимо, тачка C је између тачака A и B, може се исказати: тачка B је са оне стране тачке C са које није тачка A, тачка B је иза тачке C у односу на тачку A, тачка A је испред тачке C у односу на тачку B, итд. То се може математички записати овако: A–C–B, или (ACB). Захтијевао је да увијек тражимо што бољи начин. Научио нас је да изговорено и написано може бити увијек још прецизније саопштено.

Дефиниција. *Дуж* AB, у ознаци $[AB]$, је скуп који се састоји из тачака A и B и свих тачака између њих. Тачке A и B су крајеви дужи. Реалан позитиван број AB је *дужина* дужи $[AB]$.

Странице троугла ABC су дужи: $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$, а реални позитивни бројеви a, b и c су њихове дужине. Однос међу страницама троугла изражен је теоремом: свака страница троугла је већа од разлике (збира) осталих двеју страница.

1. Орто дужи троугла

Дефиниција. *Орто дуж* троугла је дуж чији је један крај теме троугла и нормална је на правој која садржи други крај те дужи и наспрамну страницу. Њена дужина назива се *висина* троугла.

1. задатак. Нацртати орто-дужи: а) оштроуглог, б) правоуглог и в) тупоуглог троугла.

Орто дужи троугла су: $[AD]$, $[BE]$ и $[CF]$. Њихове дужине означавамо, редом, са: h_a, h_b и h_c. Орто дужи оштроуглог троугла сијеку се у једној тачки. Двије орто дужи правоуглог троугла поклапају се са катетама, па је тјеме C правог угла заједнички крај орто дужи. Орто дужи тупоуглог троугла немају заједничких тачака.

Задатак за домаћи. Конструисати орто дужи троугла ако је он: а) оштроугли, б) правоугли и в) тупоугли.

а) б) в)

Теорема. Праве којима припадају орто дужи троугла сијеку се у једној тачки. Тачка пресјека зове се *ортоцентар* троугла.

Доказ. Претпостављамо у даљем да нам је позната теорема: симетрале страница троугла сијеку се у једној тачки. Нацртајмо (за домаћи: конструишимо) праве које садрже тјемена троугла ABC и паралелне су наспрамним страницама (сл. в)), тј. нека је: $A \in (KM) \parallel (BC)$, $B \in (KL) \parallel (AC)$ и $C \in (LM) \parallel (BA)$ (запис (BC) чита се права BC, тј. заграде замењују ријеч права). Нека нацртане праве образују троугао KLM. Тада је: $BC = AM$ и $BC = AK$ (као дужине наспрамних страница паралелограма), па је $AM = AK$, тј. тачка A је средиште $[KM]$.

$[AD] \perp (BC)$ (по дефиницији орто дужи) и $(KM) \parallel (BC)$ (по конструкцији), па је $(AD) \perp (KM)$.

Из доказаног слиједи да је (AD) симетрала странице $[KM]$. Слично се доказује да је (BE) симетрала странице $[KL]$ и (CF) симетрала странице $[LM]$. Дакле, (AD), (BE) и (CF), које садрже орто дужи троугла ABC, сијеку се у једној тачки, рецимо O, јер су оне симетрале страница троугла KLM.

Ако је троугао оштроугли, онда ортоцентар припада унутрашњој области троугла. Ако је троугао правоугли, онда ортоцентар припада троугаоној линији. Ортоцентар тупоуглог троугла припада спољашњој области троугла.

2. Средишне дужи троугла

Дефиниција. *Средишна дуж* троугла је дуж чији су крајеви средишта страница троугла.

Теорема. Средишна дуж троугла паралелна је наспрамној страници и једнака је њеној половини (дужи су једнаке ако су им једнаке дужине).

Доказ. Нека је $[NP]$ средишна дуж троугла ABC, $N \in [AB]$, $P \in [CA]$. Докажимо да је: 1) $(NP) \parallel (BC)$ и 2) $NP = \dfrac{1}{2}BC$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

јер је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$. Из $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, по дефиницији једнакости два вектора, слиједи: 1) $(NP) \parallel (BC)$ и 2) $NP = \frac{1}{2}BC$.

(Богат је избор задатака који се могу дати за домаћи, укључујући и средишну дуж трапеза.)

3. Тежишне дужи троугла

Дефиниција. *Тежишна дуж* троугла је дуж чији је један крај тјеме троугла, а други крај је средиште наспрамне странице троугла. Дужине тежишних дужи означавамо са: t_a, t_b и t_c.

Теорема. Тежишне дужи троугла сијеку се у једној тачки (*тежишту* троугла).

Доказ. Нека се тежишна $[BR]$ и тежишна $[CS]$ сијеку у тачки, рецимо, T. Докажимо да тада тачка T припада и трећој тежишној $[AQ]$.

Нека су тачке U и V, редом, симетричне тачкама R и S у односу на тачку T, тј. $TU = TR$ и $TV = TS$. Тада су дужи $[UV]$ и $[SR]$ једнаке (једнаких дужина) и паралелне, као централно симетричне дужи (опет нешто за доказивање).

Како су тачке R и S (по дефиницији тежишне дужи) средишта страница, то је $[SR]$ средишна дуж троугла ABC, па је $[SR] \parallel [BC]$ и $SR = \frac{1}{2}BC$. Из доказаног слиједи $[UV] \parallel [BC]$ и $UV = \frac{1}{2}BC$, тј. $[UV]$ је средишна дуж троугла BCT, па су тачке U и V, редом, средишта страница $[BT]$ и $[CT]$ троугла BCT.

Добили смо: $[BU] = [UT] = [TR]$ и $[CV] = [VT] = [TS]$, тј. $BT = \frac{2}{3}BR$, $TR = \frac{1}{3}BR$, $CT = \frac{2}{3}CS$ и $TS = \frac{1}{3}CS$, односно тачка T дијели тежишне дужи $[BR]$ и $[CS]$, полазећи од тјемена, у односу $2:1$. Докажимо да она то ради и са трећом тежишном $[AQ]$.

Претпоставимо да се тежишне дужи $[BR]$ и $[AQ]$ сијеку у некој тачки, рецимо T'. Тада је, према доказаном, $BT' = \frac{2}{3}BR$ и $T'R = \frac{1}{3}BR$, тј. тачке T и T' се поклапају.