Здравко Ф. Старц

ТРИСЕКЦИЈА УГЛА ПРИМЕНОМ ХИПЕРБОЛЕ

P. L. Wanzel је 1837. год. доказао да трисекцију угла у општем случају није могуће извршити елементарно, тј. применом само лењира и шестара. Међутим, ако проблем проширимо: извршити трисекцију угла применом лењира, шестара и инструмента који црта одређену криву, тада је проблем решив.

Од мађарског математичара Bolyai János-а (1802–1860) потиче трисекција угла применом хиперболе. О животу и делу Bolyai János-а видети у књизи [2].

По Bolyai-ји конструкција се изводи на следећи начин. Нека је дата грана хиперболе $xy = 1$ у првом квадранту. Дати оштар угао α поставимо тако да се теме угаоне линије налази у координатном почетку и да се један крак угла поклапа са x-осом. Нека је тачка $A(a,b)$, где је $ab = 1$, пресечна тачка другог крака угла и хиперболе и нека је $OA = r$. Конструишимо кружницу са центром A, полупречника $2r$ и нека је B пресечна тачка те кружнице и хиперболе у углу α. Даље, нека је D пресечна тачка праве AB и x-осе и нека је $\beta = \angle ODA$. Докажимо да је $\alpha = 3\beta$.

Најпре, одредимо координате тачке $B(x, y)$. Из правоуглог троугла ABC, где је права AC паралелна са x-осом, добијамо да је $AC = 2r\cos\beta$, $BC = 2r\sin\beta$, па следи да је $x = a + 2r\cos\beta$, $y = b - 2r\sin\beta$. Како тачка B припада хиперболи $xy = 1$, имамо да је

$$\begin{aligned} xy - 1 &= (a + 2r\cos\beta)(b - 2r\sin\beta) - 1 \\ &= ab + 2r(b\cos\beta - a\sin\beta) - 4r^2\sin\beta\cos\beta - 1 = 0, \end{aligned}$$

тј.

$$b\cos\beta - a\sin\beta = r\sin 2\beta. \tag{1}$$

Са друге стране имамо да је $b = r\sin\alpha$, $a = r\cos\alpha$, па из (1) добијамо

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta. \tag{2}$$

Како је $AD > 2r > r$, то је $c > a$, па следи да је $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, тј. $\alpha > \beta$. Према томе, из (2) добијамо да је $\alpha = 3\beta$.

ЛИТЕРАТУРА

[1.] Đ. Kurepa, *Viša algebra I*, Beograd 1969.
[2.] D. J. Strojk, *Kratak pregled istorije matematike*, Beograd 1987.
[3.] Gyula Sz.-Nagy, *Bolyai János szögharmadolása*, Matematikai Lapok 4 (1953), 84–86