Др Радоје Шћепановић

ТЕОРЕМА О НЕПОКРЕТНОЈ ТАЧКИ КОНТРАКТИВНОГ ПРЕСЛИКАВАЊА И ЊЕНЕ ПРИМЈЕНЕ У РЈЕШАВАЊУ ЗАДАТАКА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

У овом раду биће формулисана теорема о егзистенцији непокретне тачке контрактивног пресликавања. На крају су наведене примјене ове теореме на рјешавање задатака из геометрије.

1. Елементи математичке анализе

Нека је $\mathbf{R}^3$ скуп свих могућих уређених тројки $x = (x_1, x_2, x_3)$, гдје x_1, x_2, $x_3 \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ – поље реалних бројева).

У линеарни простор $\mathbf{R}^3$ може се увести норма на различите начине (норма је ненегативна функција $\|\cdot\|: \mathbf{R}^3 \to [0, +\infty[$ која има следећа својства: $\|x\| > 0$ за $x \neq 0$, $\|0\| = 0$; $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbf{R}$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$), напримјер, за $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

(ово је тзв. Еуклидска норма).

Нека је $\langle x^{(n)} \rangle$ низ елемената из $\mathbf{R}^3$.

Дефиниција 1. За низ $\langle x^{(n)} \rangle$ кажемо да конвергира ка елементу $x \in \mathbf{R}^3$, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$.

Чињеницу да низ $\langle x^{(n)} \rangle$ конвергира ка x записујемо и на следећи начин: $x^{(n)} \to x$, $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$.

Дефиниција 2. За низ $\langle x^{(n)} \rangle$ из $\mathbf{R}^3$ кажемо да је фундаментални или Кошијев ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n > n_0)\, \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon.$$

Без доказа наводимо

Лема 1. *Сваки фундаментални низ у* $\mathbf{R}^3$ *је конвергентан низ.*

Дефиниција 3. Кажемо да је пресликавање $f\colon \omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ непрекидно у тачки $x \in \omega$, ако за сваки низ $\langle x^{(n)} \rangle$ елемената из ω који конвергира ка тачки x важи $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x^{(n)}) - f(x)\| = 0$ (што се записује и као $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(x)$) (Хајнеова дефиниција непрекидности функције у тачки). Пресликавање f је непрекидно на скупу ω ако је оно непрекидно у свакој тачки из ω.

Дефиниција 4. За пресликавање $f\colon \omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ кажемо да је контрактивно (или да је контракција) на ω ако

$$(\exists q \in [0,1[)(\forall x, y \in \omega)\, \|f(y) - f(x)\| \leqslant q\|y - x\|.$$

Свако контрактивно пресликавање $f\colon \omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ је непрекидно на скупу ω.

Скуп $D_r(x_0) = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x - x_0\| \leqslant r \,\}$, $r > 0$ називамо затвореном лоптом у $\mathbf{R}^3$ са центром у тачки x_0 и полупречником r. Аналогно се дефинише и отворена лопта у $\mathbf{R}^3$, то је скуп $\{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x - x_0\| < r \,\}$, $r > 0$. Околином тачке x, $x \in \mathbf{R}^3$, називамо сваку отворену лопту која садржи тачку x.

Дефиниција 5. Тачку $x \in \omega$, $\omega \subset \mathbf{R}^3$, називамо тачком нагомилавања скупа ω ако свака њена околина садржи бар једну тачку из ω различиту од x.

Дефиниција 6. Скуп ω, $\omega \subset \mathbf{R}^3$, називамо затвореним ако он садржи све своје тачке нагомилавања.

Примјери затворених скупова у $\mathbf{R}$ су сам простор $\mathbf{R}$ и одсјечак $[a, b]$. У простору $\mathbf{R}^2$, то су простор $\mathbf{R}^2$, круг, троугао, правоугаоник, ... У $\mathbf{R}^3$ то су $\mathbf{R}^3$, пирамида, затворена лопта, призма, ... (Због различитих схватања шта је круг, троугао, ... , пирамида, ... , овдје се подразумијева да они садрже како све унутрашње тачке тако и све тачке на граници).

2. Теорема о непокретној тачки

Уведимо појам непокретне тачке пресликавања.

Дефиниција 7. Тачку x^*, за коју је $f(x^*) = x^*$, називамо непокретном (фиксном) тачком пресликавања f.

Напримјер, пресликавање $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинисано са $x \mapsto f(x) = x^2 - 6x + 10$ има двије непокретне тачке, то су $x = 2$ и $x = 5$, јер је $f(2) = 2$ и $f(5) = 5$.

Теорема 1. *Нека је ω затворен скуп у $\mathbf{R}^3$ и $f\colon \omega \to \omega$ контрактивно пресликавање. Тада*

а) $(\exists!\, x^* \in \omega)\, f(x^*) = x^*$*;*

б) за произвољно $x^{(0)} \in \omega$ низ $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$, $n = 0, 1, \ldots$ конвергира ка тачки x^*;

в) $\|x^* - x^{(m)}\| \leqslant \dfrac{q^m}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$.

Напомена 1. Теорема 1 важи и за општију класу линеарних простора. Важи за тзв. метричке просторе у којима сваки фундаментални низ конвергира.

Напомена 2. Свако непрекидно пресликавање $f\colon D_r(x_0) \to D_r(x_0)$, $D_r(x_0)$ лопта у $\mathbf{R}^3$ (може и у $\mathbf{R}^m$) има бар једну непокретну тачку у $D_r(x_0)$ (теорема Брауера, доказана 1911).

3. Примјери из геометрије

Уведимо ознаку за ортогоналну пројекцију тачке P на праву или површ σ. Ознака је $\operatorname{ort}_\sigma P$.

Задатак 1. У равни су дате праве p_1, p_2, ... , p_n. Нека је $P_1 \in p_1$, $P_2 = \operatorname{ort}_{p_2} P_1$, ... , $P_n = \operatorname{ort}_{p_n} P_{n-1}$ и $P_{n+1} = \operatorname{ort}_{p_1} P_n$. Да ли постоји тачка $P_1 \in p_1$ таква да је $P_{n+1} \equiv P_1$?

Рјешење. У случају да су праве p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ међу собом паралелне, тада за сваку тачку $P_1 \in p_1$ важи $P_{n+1} \equiv P_1$. Претпоставимо да међу правим p_1, ... , p_n постоје бар двије непаралелне. Нека су то праве p_i и p_{i+1} (сл. 1). Права p_i у равни, са Декартовима правоуглим координатама система Oxy, има једначину $a_i x + b_i y + c_i = 0$ (сл. 2). Овај координатни систем изаберимо тако да се права p_1 поклапа са осом Ox.

Сл. 1 Сл. 2

Бирајући тачку $P_1 \in p_1$ ми заправо бирамо апсцису x тачке P_1 на оси Ox. Када се нађе тачка $P_{n+1} = \operatorname{ort}_{p_1} P_n$, њену апсцису означимо са $f(x)$. На овај начин је дефинисано једнозначно пресликавање $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (апсциси $x \in \mathbf{R}$ тачке P_1 придружена је апсциса $f(x) \in \mathbf{R}$ тачке P_{n+1}). За свако $j = 1, 2, \ldots, n$ имамо

$$(\exists q_j \in [0,1])(\forall P_j, P_j' \in p_j)\, \overline{P_{j+1}P_{j+1}'} = q_j\, \overline{P_jP_j'},$$

гдје је са $\overline{P_jP_j'}$ означена дужина дужи P_jPj'. Праве p_i и p_{i+1} нијесу паралелне, па је $0 \leqslant q_i < 1$. Дакле,

$$(\exists q \in [0,1[)(\forall P_1, P_1' \in p_1)\, \overline{P_{n+1}P_{n+1}'} \leqslant q\, \overline{P_1P_1'},$$

гдје је $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Горњу неједнакост можемо записати и у облику

$$(\exists q \in [0,1[)(\forall x, x' \in \mathbf{R})\, |f(x') - f(x)| \leqslant q|x' - x|$$

(x (x') је апсциса тачке P_1 (P_1'), $f(x)$ ($f(x')$) је апсциса тачке P_{n+1} (P_{n+1}')). Слиједи, пресликавање $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је контрактивно, па сагласно теореми 1, имамо $(\exists x_1 \in \mathbf{R})\, f(x_1) = x_1$, односно $(\exists!\, P_1 \in p_1)\, P_{n+1} \equiv P_1$ (x_1 је апсциса тачке P_1).

Напомена 3. Ако $(\exists i \in \{1, 2, \ldots n-1\})\, p_i \perp p_{i+1}$ или је $p_n \perp p_1$, ($\perp$ – ознака за нормалност правих) тада се тачка P_1 из задатка 1 (за коју је $P_{n+1} \equiv P_1$), може наћи конструктивно. (Уочити да је $f(\mathbf{R})$ један реалан број).

Како наћи тачку P_1 (за коју је $P_{n+1} \equiv P_1$)? Како се тачка P_1 добија, у општем случају, у бесконачно много корака, то је конструктивни прилаз (лењиром и шестаром) немогућ. Користећи математички апарат линеарне алгебре, неки од програмских језика и рачунар, апсциса тачке P_1 се може израчунати.

На екрану се нацртају графици правих $p_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0$, $a_i^2 + b_i^2 > 0$, $i = 2, \ldots, n$ (права $p_1 \equiv y = 0$ је узета за x осу). За фиксирано $x \in \mathbf{R}$ (фиксирана тачка $P_1 \in p_1$), налази се $f(x)$ на сљедећи начин. Ортогонална пројекција $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ тачке $P_i = (x_i, y_i) \in p_i$ на праву p_{i+1} има координате:

а) $a_{i+1} b_{i+1} \neq 0$

$$x_{i+1} = \frac{b_{i+1}^2 x_i - b_{i+1} a_{i+1} y_i - a_{i+1} c_{i+1}}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}, \quad y_{i+1} = -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} x_{i+1} - \frac{c_{i+1}}{b_{i+1}};$$

б) $a_{i+1} = 0$, $b_{i+1} \neq 0$

$$x_{i+1} = x_i, \quad y_{i+1} = -\frac{c_{i+1}}{b_{i+1}};$$

в) $a_{i+1} \neq 0$, $b_{i+1} = 0$

$$x_{i+1} = -\frac{c_{i+1}}{a_{i+1}}, \quad y_{i+1} = y_i.$$

Наведимо програм, на Pascal језику, за налажење непокретне тачке P_1, $P_{n+1} \equiv P_1$.

```
program ntfx( input, output);
type
  niz = array [ 0..100 ] of real;
var
  a, b, c :  niz;
  n , i :  integer;
  eps , quu :  real;
  x1, y1, xp1, yp1, fx :  real;
  x2, y2, xp2, yp2 :  real;
  s1, s2 :real;
  procedura projek racuna projekciju tacke (xo,yo) na pravu
  px+qy+r=0 i to je tacka (xp,yp)
procedure projek( p, q, r :  real; xo,yo :  real; var xp,yp :  real );
begin
  if( p * q <> 0 )then
    begin
      xp := ( q*q*xo - p*q*yo - p*r) / ( p*p + q*q );
      yp := - p * xp/q - r/q;
    end
  else
    begin
      if( p <> 0) then
        begin
          xp := - r/p;
          yp := yo;
```

```
        end
      else
        begin
          xp := xo;
          yp := - r/q;
        end;
    end;
end;
  funkcija pow racuna (x na n)
function pow(x :  real; n:  integer) :  real;
var
  rez:  real;
begin
  rez := 1;
  for i:= 1 to n do
    rez := rez * x;
  pow := rez;
end;
begin
  write('Unesite broj pravih :  ');
  readln( n );
  write('Unesite tacnost :  ');
  readln( eps );
  writeln('Prva prava se uzima kao x osa koordinatnog sistema ');
  for i := 2 to n do
    begin
      write('Unesite koeficijente ',i,'.  prave :  ');
      readln( a[i], b[i], c[i]);
    end;
  write('Unesite pocetne tacke (x - koordinate dvaju tacaka) :  ');
  readln( x1 , x2 );
  repeat
    y1 := 0;
    y2 := 0;
    quu := 1;
    s1 := sqrt( sqr( x2 - x1 ) + sqr( y2 - y1 ) );
    for i := 2 to n do
      begin
        projek( a[i], b[i], c[i], x1, y1, xp1, yp1);
        x1 := xp1;
        y1 := yp1;
        if( quu <> 0 )then
          begin
            projek( a[i], b[i], c[i], x2, y2, xp2, yp2);
            s2 := sqrt( sqr( xp2 - xp1 ) + sqr( yp2 - yp1 ) );
            if( s2 = 0 )then
              quu := 0
            else
              begin
                x2 := xp2;
                y2 := yp2;
                 quu je koeficijent sazimanja
                quu := quu * s2 / s1;
                s1 := s2;
              end;
          end;
      end;
    if( quu <> 0 ) then
      quu := quu * abs( x2 - x1 ) / s2;
```

```
    fx := x1;
  until( (pow( quu, n)/(1 - quu)) - eps < 0);
  writeln('Koordinata nepokretne tacke je ',fx:10:7);
end.
```

Када се нађе непокретна тачка fx пресликавања f (заправо нађена је тачка $P_1 \in p_1$ таква да је $P_{n+1} \equiv P_1$) онда се она уцрта у координатни систем у којем су већ нацртане праве p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тако је помоћу описаног алгоритма „конструисана" тачка P_1 чију смо егзистенцију утврдили користећи теорему о непокретној тачки. Наравно све ово је могуће са екрана пренијети на штампач.

Конкретно за праве

$$P_1 \equiv y = 0, \quad P_2 \equiv 2x + y - 4 = 0, \quad P_3 \equiv x + y - 2 = 0, \quad P_4 \equiv x + 3y - 1 = 0$$

и тачност $\varepsilon = 10^{-4}$ налазимо да је $fx = 1.6875$, тј. $P_1(fx)$.

Задатак 2. Дате су праве p_1, p_2, ..., p_n у простору тако да међу њима имају бар двије које нијесу паралелне. Нека је тачка $P_1 \in p_1$, $P_2 = \operatorname{ort}_{p_2} P_1$, ..., $P_n = \operatorname{ort}_{p_n} P_{n-1}$ и $P_{n+1} = \operatorname{ort}_{p_1} P_n$. Доказати да $(\exists! \, P_1 \in p_1) \, P_{n+1} \equiv P_1$.

Рјешење. Овај задатак се рјешава слично као задатак 1. Права p_i у простору $\mathbf{R}^3$, са Декартовим правоуглим координатним системом $Oxyz$, има једначину

$$\frac{x - \tilde{x}_i}{a_i} = \frac{y - \tilde{y}_i}{b_i} = \frac{z - \tilde{z}_i}{c_i},$$

гдје је $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ тачка са праве p_i и $\{a_i, b_i, c_i\}$ вектор правца праве p_i. Изаберимо координатни систем $Oxyz$ тако да се оса Ox поклапа са правом p_1. Апсцису тачке P_1 означимо са x, а апсцису тачке $P_{n+1} \in p_1$ са $f(x)$. Очигледно, пресликавање $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је контрактивно, па сагласно теореми 1, $(\exists! \, x_1 \in \mathbf{R}) \, f(x_1) = x_1$, односно $(\exists! \, P_1 \in p_1) \, P_{n+1} \equiv P_1$.

Посљедица 1. У задатку 2 за $n = 2$ и у случају да се праве p_1 и p_2 мимоилазе, тачке P_1 и P_2, за које је $P_3 \equiv P_1$, одређују заједничку нормалу (мимоилазних) правих p_1 и p_2. Најкраће растојање између правих p_1 и p_2 се реализује по дужи P_1P_2.

Задатак 3. Дате су равни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, међу којима има и непаралелних, у простору и тачка $P_1 \in \alpha_1$. Нека је $P_2 = \operatorname{ort}_{\alpha_2} P_1$, ..., $P_n = \operatorname{ort}_{\alpha_n} P_{n-1}$ и $P_{n+1} = \operatorname{ort}_{\alpha_1} P_n$. Доказати да $(\exists! \, P_1 \in \alpha_1) \, P_{n+1} \equiv P_1$.

Рјешење. Раван α_i у простору $\mathbf{R}^3$ са правоуглим координатама система $Oxyz$ има једначину $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$. Координатни систем $Oxyz$ бирамо тако да се координатна раван Oxy поклапа са равни α_1. Тачка $P_1 \in \alpha_1$ има координате $u = (x, y, 0)$. Координате тачке $P_{n+1} \in \alpha_1$ означимо са $f(u) = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$. На овај начин је дефинисано једнозначно, контрактивно пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Према теореми 1, $(\exists! \, u_1 \in \mathbf{R}^2) \, f(u_1) = u_1$, односно $(\exists! \, P_1 \in \alpha_1) \, P_{n+1} \equiv P_1$.

Задатак 4. Дат је оштроугли троугао ABC. На страници AB задата је тачка P_1. Нека је $P_2 = \operatorname{ort}_{BC} P_1$, $P_3 = \operatorname{ort}_{AC} P_2$ и $P_4 = \operatorname{ort}_{AB} P_3$. Доказати да $(\exists! \, P_1 \in AB) \, P_4 \equiv P_1$.

Рјешење. У равни у којој се налази троугао ABC поставимо координатни систем Oxy тако да се оса Ox поклапа са страницом AB поменутог троугла. Страници AB на оси Ox одговара одсјечак $[a,b]$. Бирајући тачку $P_1 \in AB$ ми бирамо апсцису x те тачке која припада оси Ox. Лако се показује да ће и апсциса $f(x)$ тачке P_4 припадати одсјечку $[a,b]$. На овај начин пресликавање $f\colon [a,b] \to [a,b]$ је контрактивно, па сагласно теореми 1, имамо $(\exists!\, x_1 \in [a,b])\, f(x_1) = x_1$, односно $(\exists!\, P_1 \in AB)\, P_4 \equiv P_1$.

Примједба 2. Да ли постоји тачка $P_1 \in AB$ у задатку 4 (за коју је $P_4 \equiv P_1$) ако је троугао ABC тупоугли? Размотрити случај када је троугао ABC правоугли (могуће је конструисати тачку P_1, $P_4 \equiv P_1$).

Задатак 5. Дата је тространа пирамида $ABCD$ чији су сви углови диедара оштри. Нека је тачка $P_1 \in ABC$, $P_2 = \mathrm{ort}_{BCD}\, P_1$, $P_3 = \mathrm{ort}_{ACD}\, P_2$, $P_4 = \mathrm{ort}_{ABD}\, P_3$ и $P_5 = \mathrm{ort}_{ABC}\, P_4$. Доказати да $(\exists!\, P_1 \in ABC)\, P_5 \equiv P_1$.

Рјешење. Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$ поставимо тако да координатна раван Oxy садржи страну ABC. Тачка $P_1 \in ABC$ у координатном простору $Oxyz$ има координате $u = (x, y, 0)$. Координате тачке P_5 означимо са $f(u) = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$. Са (ABC) означимо скуп тачака стране ABC посматран као (затворен) скуп у равни Oxy (односно у $\mathbf{R}^2_{x_1x_2}$). Пресликавање $f\colon (ABC) \to (ABC)$ је контрактивно, па сагласно теореми 1, важи $(\exists!\, u_1 \in (ABC))\, f(u_1) = u_1$, односно $(\exists!\, P_1 \in ABC)\, P_5 \equiv P_1$.

Примједба 3. Да ли тачка $P_1 \in ABC$ (за коју је $P_5 \equiv P_1$) из задатка 5 постоји за произвољну пирамиду?

Примједба 4. Направите програме за налажење непокретних тачака чије су егзистенције утврђене у задацима 2, 3, 4 и 5.

Напомена 4. У задацима 1, 2 и 3 није неопходно постављати координатни систем тако да се у прва два случаја координатна оса Ox поклапа са правом p_1, а у трећем да се координатна раван Oxy поклапа са равни α_1. То смо радили да бисмо снизили за по један димензију простора у којем се налазе домен и кодомен пресликавања f.

Сл. 3

Задатак 6. Нека су M_1 и M_2 двије мапе једне те исте области рађене у различитим размјерама (мапе су правоугаоног облика). Већу мапу означићемо са M_2. Мапу M_1 положимо на мапу M_2 тако да, скуповно гледано, буде $M_1 \subset M_2$. Доказати да се врхом оловке (сл. 3) може истовремено показати само једно мјесто на објема мапама.