Предраг Радиновић

ЈЕДАН НАЧИН ИЗВОЂЕЊА ОБРАСЦА ЗА РЕШАВАЊЕ КУБНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

У овом чланку ћемо изложити један једноставан поступак помоћу кога могу да се одреде сви корени кубног полинома $x^3 + px^2 + qx + r$, тј. алгебарски реши једначина

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \tag{1}$$

Основна замисао је следећа: ма које решење x те једначине тражимо у облику

$$x = A + B + C,$$

односно, слободније речено, „натераћемо" да то x јесте решење једначине (1) и уз то, након налажења A, B, C добићемо образац за сва решења.

И тако полазимо од једначине $x = A + B + C$ и вршимо следеће трансформације

$$\begin{aligned} x - A &= B + C, \\ (x-A)^3 &= B^3 + 3B^2C + 3BC^2 + C^3 \\ &= B^3 + 3BC(B+C) + C^3 \\ &= B^3 + 3BC(x-A) + C^3. \end{aligned}$$

Сређивањем се добија

$$x^3 - 3Ax^2 + 3A^2x - A^3 = B^3 + 3BCx - 3ABC + C^3,$$

односно

$$x^3 - 3Ax^2 + 3(A^2 - BC)x - A^3 + 3ABC - (B^3 + C^3) = 0. \tag{2}$$

Желимо да A, B и C одредимо тако да се једначина (2) „поклопи" са (1), па стога постављамо следеће једначине по A, B и C:

$$-3A = p \tag{3}$$

$$3(A^2 - BC) = q \tag{4}$$

$$-A^3 + 3ABC - (B^3 + C^3) = r \tag{5}$$

Из (3) следи да је $A = -\dfrac{p}{3}$. Заменом у (4) и (5), налажење B и C као што ћемо видети, своди се на решавање квадратне једначине.

Заиста, из (4) следи $3\left(\left(-\dfrac{p}{3}\right)^2 - BC\right) = q$, односно

$$BC = \frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}. \tag{6}$$

Заменом (3) и (6) у (5) добијамо

$$-\left(-\frac{p}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}\right) - (B^3 + C^3) = r,$$

тј.

$$B^3 + C^3 = \frac{-2p^3 + 9pq - 27r}{27}. \tag{7}$$

Кубирањем леве и десне стране у (6) имамо

$$B^3C^3 = \left(\frac{p^2 - 3q}{9}\right)^3. \tag{8}$$

Ако уведемо ознаке

$$B^3 = t_1 \quad \text{и} \quad C^3 = t_2, \tag{9}$$

добијамо из (7) и (8) да су t_1 и t_2 корени квадратне једначине

$$t^2 - \frac{-2p^3 + 9pq - 27r}{27}\, t + \left(\frac{p^2 - 3q}{9}\right)^3 = 0. \tag{10}$$

Решавањем једначине (10) добијамо

$$t_{1,2} = \frac{-(2p^3 - 9pq + 27r) \pm \sqrt{(2p^3 - 9pq + 27r)^2 - 4(p^2 - 3q)^3}}{54}. \tag{11}$$

Како из (9) имамо девет могућности јер је

$$B \in \{\sqrt[3]{t_1}, \varepsilon\sqrt[3]{t_1}, \varepsilon^2\sqrt[3]{t_1}\} \quad \text{и} \quad C \in \{\sqrt[3]{t_2}, \varepsilon\sqrt[3]{t_2}, \varepsilon^2\sqrt[3]{t_2}\},$$

где је $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, то због једнакости (6), $BC = \dfrac{p^2}{9} - \dfrac{q}{3} \in \mathbf{R}$, добијамо само ове могућности:

$$\begin{aligned} B_1 &= \sqrt[3]{t_1}, & C_1 &= \sqrt[3]{t_2}, \\ B_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{t_1}, & C_2 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{t_2}, \\ B_3 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{t_1}, & C_3 &= \varepsilon\sqrt[3]{t_2}. \end{aligned}$$

Дакле, формуле за решења једначине (1) су

$$x_1 = A + B_1 + C_1, \quad x_2 = A + B_2 + C_2, \quad x_3 = A + B_3 + C_3,$$

при чему је из (11)

$$B_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-(2p^3 - 9pq + 27r) + \sqrt{(2p^3 - 9pq + 27r)^2 - 4(p^2 - 3q)^3}}{2}},$$

$$C_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-(2p^3 - 9pq + 27r) - \sqrt{(2p^3 - 9pq + 27r)^2 - 4(p^2 - 3q)^3}}{2}}$$

и $B_2 = \varepsilon B_1$, $B_3 = \varepsilon^2 B_1$, $C_2 = \varepsilon^2 C_1$, $C_3 = \varepsilon C_1$ и $A = -\dfrac{p}{3}$.

Захвалност. Захваљујем проф. др С. Прешићу на корисним сугестијама у обликовању ове формуле.

РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАР '97

Друштво математичара Србије организовало је и ове године традиционални Републички семинар '97 о настави математике и рачунарства у основној школи, у средњим школама, на вишим школама и на факултетима. Семинар је организован у Београду, под покровитељством Министарства просвете Републике Србије и у сарадњи са Математичким факултетом у Београду, а трајао је два дана — 10. и 11. јануара 1997. године.

Као и претходних година Семинар је радио у три секције и то:

- I секција — настава математике и рачунарства у старијим разредима основне школе,
- II секција — настава математике и рачунарства у средњим школама,
- III секција — настава математике и рачунарства на вишим школама и на факултетима.

На пленарној седници првог дана рада Семинара одржана су два предавања: проф. др Зоран Каделбург: *Актуелни тренутак наставе математике* и др Гордана Павловић-Лажетић: *Quo Vadimus – Рачунарство на крају 20. века.*

По секцијама је одржано укупно 31 предавање и то: у I секцији 8, у II секцији 15 и у III секцији 8 предавања. Предавања су била посвећена актуелним питањима наставе математике и рачунарства. Предавачи су били професори универзитета или истакнути професори средњих школа.

У току рада Семинара одржана су и два округла стола са следећим темама: *Пријемни испит за упис у средњим школама* и *Искуства у реализацији нових наставних програма.* У раду округлих столова узео је учешћа велики број учесника Семинара.

На Семинару је било око 550 регистрованих учесника. С обзиром да је Министарство просвете покрило трошкове организације Семинара, укључујући штампање билтена са програмом и резимеима предавања, учесници су били ослобођени плаћања котизације.