В. И. Гаврилов, Н. Лабудовић, Е. Н. Михајлов, Ж. Павићевић

ТЕПЛИЦОВ ОПЕРАТОР

Проста својства и примјене

У већини „савремених" уџбеника математичке анализе тема „Гранична вриједност бројног низа" заузима релативно мало мјеста. То је, по нашем мишљењу, супротно савременим тенденцијама развитка математичке науке и њених примјена, у којима значајну улогу имају питања апроксимација, сумирања, конвергенције, стабилности процеса — специјално итерационих процеса, фрактала. Последњи представљају класичан објекат изучавања у теорији граничних вриједности низова.

У овом чланку ћемо изложити један општи метод изучавања граничних вриједности бројних низова, који је нашао плодотворну примјену у рјешавању многих проблема математике, физике, математичке економије и других примјењених наука. Развио га је њемачки математичар О. Теплиц[1] и он се по њему зове метод Теплицових оператора (трнасформација). Размотрићемо два својства Теплицових оператора и неке њихове примјене. Циљ нам је да покажемо да проста својства Теплицових оператора не само да могу бити укључена у универзитетске уџбенике математичке анализе, него да њихово коришћење значајно упрошћава излагање многих тема које се традиционално обрађују у њима.

1. Теплицов оператор. Нека су реални бројеви t_{mn} $(1 \leqslant m \leqslant n)$, $m, n \in \mathbf{N}$, елементи бесконачне троугаоне матрице

$$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \cdots & \cdot & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & t_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Матрица (1), на скупу свих бројних низова, дефинише линеарни оператор T, који произвољни бројни низ (x_n) слика у низ (x'_n) на сљедећи начин

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Напријед дефинисани линеарни оператор T зове се Теплицов оператор.

[1] O. Töplitz (1881–1940), њемачки математичар

2. Прва Теплицова теорема. *Нека за матрицу (1) важи:* (i) *Елементи произвољне колоне образују бесконачно мали низ, тј.* $\lim_{n\to\infty} t_{nm} = 0$, *за свако фиксирано* $m \in \mathbf{N}$. (ii) *Суме апсолутних вриједности елемената сваке врсте су ограничене истом константом, тј. постоји* $k > 0$ *да је*

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| < k, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Тада матрица (1) са (2) дефинише Теплицов оператор који сваки бесконачно мали низ (x_n) *слика у бесконачно мали низ* (x'_n).

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $m \in \mathbf{N}$ да за свако $n \in \mathbf{N}$, $n > m$, важи $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2k}$. Користећи (ii) закључујемо да је

$$\begin{aligned}|x'_n| &\leqslant |t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nm}x_m| + |t_{n,m+1}||x_{m+1}| + \cdots + |t_{nn}||x_n| \\ &< |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2k}(|t_{n,m+1}| + \cdots + |t_{nn}|) \\ &\leqslant |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2k}\,k = |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Како је $m \in \mathbf{N}$ фиксирано, то је, сагласно (i), $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$ за свако $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Отуда, даље, слиједи да постоји $N \in \mathbf{N}$, $N \geqslant m$, да за свако $n \in \mathbf{N}$, $n > N$, важи

$$|t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N \geqslant m. \tag{4}$$

Из (3) и (4) добијамо $|x'_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $n > N \geqslant m$, тј. $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$. ■

3. Друга Теплицова теорема. *Нека за елементе* t_{nm} *матрице (1) важе услови из прве Теплицове теореме и*

(iii) *низ* (T_n), $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn}$, $n \in \mathbf{N}$, *има* $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$.

Тада Теплицов оператор, којег рађа матрица (1), слика низ (x_n) *који има* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *у низ* (x'_n) *који, такође, има* $\lim_{n\to\infty} x'_n = a$.

Доказ. Формулу (2) за x'_n, $n \in \mathbf{N}$, напишимо у облику

$$x'_n = t_{n1}(x_1 - a) + \cdots + t_{nn}(x_n - a) + T_n \cdot a, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Примијенимо прву Теплицову теорему на низ $(x_n - a)$, $\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$, па сагласно услову (ii), закључујемо на основу (5), да је $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty}(T_n \cdot a) = a$. ■

4. Кошијева[2] теорема. *Ако бројни низ* (x_n) *има* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *тада низ* (y_n), $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, *има* $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

[2] A. L. Cauchy (1789–1857), француски математичар

Доказ. Нека је $t_{n1} = t_{n2} = \cdots = t_{nn} = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. Услов (i) из прве Теплицове теореме важи, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nm} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, за свако фиксирано m, $m \in \mathbf{N}$. Услови (ii) и (iii) из прве и друге Теплицове теореме такође важе, јер је $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} = |t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| = 1$, $n \in \mathbf{N}$. Тада из друге Теплицове теореме слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Кошијева теорема игра значајну улогу у питањима уопштеног сумирања редова методом аритметичких средина (или методом Чезара[3]) обезбјеђујући регуларност тих метода. Метод сумирања аритметичким срединама примјењује се и у теорији Фуријеових[4] тригонометријских редова, хармонијској анализи и другим областима анализе.

5. Штолцова[5] теорема. *Нека је* (y_n), *за* $n \geqslant N$, $N \in \mathbf{N}$, *строго растући низ, који није ограничен одозго. Ако је за низ* (x_n), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$, *тада је* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

Доказ. Нека је $l \in \mathbf{R}$. Тада, користећи својство локалности граничне вриједности бројног низа, можемо узети $N = 1$, чиме не нарушавамо општост доказа. Како низ (y_n) није ограничен одозго, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Узмимо да је $x_0 = y_0 = 0$ и $y_1 > 0$. Тада је $0 < y_n < y_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Нека је $t_{nm} = \dfrac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \in \mathbf{N}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nm} = (y_m - y_{m-1}) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$, за свако фиксирано $m \in \mathbf{N}$.

Даље је

$$\begin{aligned} |t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| &= t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} \\ &= \frac{y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots + y_n - y_{n-1}}{y_n} = \frac{y_n}{y_n} = 1, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

На тај начин је показано да су испуњени услови друге Теплицове теореме, па низ $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, за који је

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{m=1}^{n} t_{nm} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}}, \quad n \in \mathbf{N}$$

има $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$, тада за довољно велико $n \in \mathbf{N}$, важи $x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0$. Отуда слиједи да је (x_n) строго растући низ почев од неког n, па је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$, тада из претходног дијела доказа слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

---

[3] E. Cesáro (1859–1906), италијански математичар

[4] J. B. J. Fourier (1768–1830), француски математичар

[5] O. Stoltz (1842–1905), аустријски математичар

Случај када је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=-\infty$ своди се на претходни ако се разматра низ $(-x_n)$. ■

Непрекидан аналогон Штолцове теореме је Бернули[6]-Лопиталово[7] правило, које служи за рачунање граничне вриједности количника функција.

6. Наводимо још двије посљедице Теплицових теорема, које ћемо користити за доказ Мертенсове[8] теореме и Абелове[9] теореме о множењу бројних редова.

Теорема. *Ако су (x_n) и (y_n) бесконачно мали низови, тј.* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, *и*

$$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant k,\qquad n\in\mathbf{N},\quad k>0, \tag{6}$$

тада је (z_n), $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1$, $n\in\mathbf{N}$, бесконачно мали низ, тј. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

Доказ. Нека је $t_{nm}=y_{n-m+1}$, $1\leqslant m\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n-m+1}=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, за свако фиксирано $m\in\mathbf{N}$, то t_{nm} задовољава услов (i) из прве Теплицове теореме, док је (6) еквивалентно са (ii) у тој теореми. Отуда слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. ■

7. Теорема. *Ако бројни низови (x_n) и (y_n) имају граничне вриједности $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, тада је за бројни низ (z_n),*

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a\cdot b$.

Доказ. Из $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ слиједи да је (y_n) ограничен низ, тј. постоји $k>0$ да је $|y_n|<k$, $n\in\mathbf{N}$. Прво ћемо разматрати случај $a=b=0$. Нека је $t_{nm}=\dfrac{y_{n-m+1}}{n}$, $1\leqslant m\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nm}=0$ и $|t_{n1}|+|t_{n2}|+\cdots+|t_{nn}|=\dfrac{1}{n}(|y_n|+|y_{n-1}|+\cdots+|y_2|+|y_1|)\leqslant\dfrac{1}{n}\cdot nk=k$, $n\in\mathbf{N}$, па $t_{nm}=\dfrac{y_{n-m+1}}{n}$, $1\leqslant m\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$, задовољавају услове прве Теплицове теореме. Отуда слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Нека је сада $b\neq0$, $t_{nm}=\dfrac{y_{n-m+1}}{bn}$, $1\leqslant m\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$, и $w_n=t_{n1}x_1+t_{n2}x_2+\cdots+t_{nn}x_n$, $n\in\mathbf{N}$. Тада је $w_n=\dfrac{1}{bn}(x_1y_n+\cdots+x_ny_1)=\dfrac{1}{b}\,z_n$, $n\in\mathbf{N}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nm}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n-m+1}}{bn}=\dfrac{b}{n}\cdot0=0$, за свако фиксирано $m\in\mathbf{N}$, и

[6] Johann Bernoulli (1667–1748), швајцарски математичар
[7] G. de l'Hospital (1661–1704), француски математичар
[8] F. K. J. Mertens (1840–1927), аустријски математичар
[9] N. H. Abel (1802–1829), норвешки математичар

$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nm}| = \dfrac{1}{|b|n}(|y_n| + |y_{n-1}| + \cdots + |y_1|) \leqslant \dfrac{1}{|b|n} \cdot nk = \dfrac{k}{|b|}$, $n \in \mathbf{N}$, то $t_{nm} = \dfrac{y_{n-m+1}}{bn}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \in \mathbf{N}$, задовољавају услове прве Теплицове теореме. За $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} = \dfrac{1}{b}\dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, је $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \dfrac{1}{b} \cdot b = 1$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = b$, што слиједи из Кошијеве теореме. Тиме је показано да $t_{nm} = \dfrac{y_{n-m+1}}{n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \in \mathbf{N}$, задовољавају услов (iii) друге Теплицове теореме. Отуда слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} (bw_n) = a \cdot b$. ■

8. Кошијево множење бројних редова. Нека су

(7) $$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

и

(8) $$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

конвергентни бројни редови.

Придржавајући се правила за множење коначних сума, направимо све могуће производе $a_i b_k$ помоћу чланова редова (7) и (8) и формирајмо од њих матрицу

(9) $$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_nb_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_nb_k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Елементи матрице (9) могу се на разне начине узети за чланове бројног низа. Напримјер, можемо их узети дијагонално или по квадратима:

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & & a_2b_1 & & a_3b_1 & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ a_1b_2 & & a_2b_2 & & a_3b_2 & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ a_1b_3 & & a_2b_3 & & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1b_1 & & a_2b_1 & & a_3b_1 & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & \\ a_1b_2 & \to & a_2b_2 & & a_3b_2 & \dots \\ & & & & \uparrow & \\ a_1b_3 & \to & a_2b_3 & \to & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

што нам, респективно, даје сљедеће бројне низове:

(10) $$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ \dots$$

и

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1,\ \ldots \tag{11}$$

Елементи матрице (9) могу се на разне начине узети и за чланове (сабирке) неког бројног реда. Тако добијени бројни ред се назива производ бројних редова (7) и (8).

Позната Кошијева теорема, која се излаже у свим курсевима математичке анализе, тврди да ако редови (7) и (8) апсолутно конвергирају, тада њихов производ, бројни ред чији су чланови елементи матрице (9) узети произвољним редосљедом, конвергира суми која је једнака производу сума A и B редова (7) и (8).

Множење редова се најчешће обавља тако што се елементи матрице (9) групишу дијагонално на тај начин да дају сљедећи ред

$$(a_1b_1) + (a_1b_2 + a_2b_1) + \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) + \cdots\ . \tag{12}$$

Ред (12), чији су чланови дати у заградама, назива се Кошијев производ редова (7) и (8) (или се каже да је то ред добијен Кошијевим множењем редова (7) и (8)).

9. Мертенсова теорема. *Ако редови (7) и (8) конвергирају сумама A и B, респективно, и ако један од тих редова апсолутно конвергира, тада њихов Кошијев производ, ред (12) конвергира суми $C = AB$.*

Доказ. Нека је ради одређености, апсолутно конвергентан ред (7). Тада је

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqslant A^*, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{13}$$

гдје је A^* сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, тј. $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. За Кошијев производ (12) редова (7) и (8) нека су $c_n =_1 b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$, $n \in \mathbf{N}$, чланови тог реда, и $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, $n \in \mathbf{N}$, његове парцијалне суме. Треба показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C = A \cdot B$.

Нека су $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbf{N}$. Лако је провјерити да је

$$C_n = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{14}$$

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, тада је за остатак $\beta_n = B - B_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Напишимо (14) на сљедећи начин

$$\begin{aligned} C_n &= a_1(B - \beta_n) + a_2(B - \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B - \beta_1) \\ &= B(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1) \\ &= A_nB - \gamma_n, \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

За низ (γ_n), $\gamma_n = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1$, $n \in \mathbf{N}$, је $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и важи (13), тј. низ (γ_n) задовољава услове теореме из одјељка 6. Отуда слиједи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} ((A_nB) + \gamma_n) = A \cdot B$. ∎

10. Примјери. Сљедећи примјер 1 показује да тврђење Мертенсове теореме не важи ако редови (7) и (8) конвергирају а апсолутно не конвергирају.

Примјер 1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ конвергира, што се лако доказује коришћењем Лајбницовог[10] критеријума, док апсолутно не конвергира.

Кошијев производ овог реда са самим собом је ред за који је

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right)$$

и

$$|c_n| > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1, \qquad n \in \mathbf{N}, \quad n > 1.$$

Отуда слиједи да (c_n) није бесконачно мали низ, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ не конвергира.

Примјер 2 показује да Кошијев производ два реда који конвергирају а апсолутно не конвергирају може да буде конвергентан ред.

Примјер 2. Лајбницов ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ конвергира а апсолутно не конвергира. За Кошијев производ тог реда са самим собом је

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{k(n-k+1)} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 1}\right] \\ &= (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k+1)} = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right]\frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n}\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Позанто је (погл, на примјер, [2], стр 321) да је $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + c - \alpha_n$, $n \in \mathbf{N}$, гдје је c, $\frac{1}{2} < c < 1$, Ојлерова[11] константа и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Отуда је

$$c_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}[\ln(n+1) + c - \alpha_n], \qquad n \in \mathbf{N},$$

па је $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$. Даље је

$$|c_{n+1}| = |c_n| - \frac{|c_n|}{n+2} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

па је

$$\begin{aligned} |c_{n+1}| - |c_n| &= -\frac{1}{n+2}\left(|c_n| - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) < 0, \qquad n \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

[10] G. W. Leibniz (1646–1716), њемачки математичар

[11] L. Euler (1707–1783), швајцарски математичар

тј. низ ($|c_n|$) је строго опадајући. Тада, из Лајбницовог критеријума, слиједи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира.

Одговор на питање да ли ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира суми $(\ln 2)^2$ даје Абелова теорема која ће бити изложена у сљедећем одјељку.

11. Абелова теорема. *Ако редови (7) и (8) конвергирају сумама A и B, респективно, а њихов Кошијев производ конвергира суми C, тада је $C = AB$.*

Доказ. Користићемо ознаке из доказа Мертенсове теореме. Тада из (14) слиједи

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Како је $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$, што слиједи из услова Абелове теореме, тада користећи Кошијеву теорему, добијамо да је

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}.$$

С друге стране, из теореме одјељка 7, добијамо ако је $x_n = A_n$, $y_n = B_n$, $n \in \mathbf{N}$, да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B.$$

Отуда је $C = AB$. ■

12. Сумирање дивергентних (неконвергентних) редова методом аритметичких средина. До идеје сумирања дивергентних редова методом аритметичких средина у простијој форми први је дошао Фробенијус[12]. Међутим, овај метод приписује се италијанском математичару Чезару, који га је даље развио.

Прије него што дамо сам метод, наводимо општа правила, која ће нам бити потребна за његово излагање.

Прво правило се назива својство линеарности. Оно се састоји у томе да ако редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергирају (не конвергирају) и ако методом аритметичких средина имају „уопштене суме“ A и B, респективно, тада бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (pa_n + qb_n)$, $p, q \in \mathbf{R}$, мора имати „уопштену суму“ $pA + qB$.

Друго правило се назива својство регуларности „уопштеног метода“ сумирања. Оно се састоји у томе да ако бројни ред конвергира и има суму S, тада он има „уопштену суму“ S.

Метод средњих аритметичких средина се састоји у сљедећем.

[12] G. Frobenius (1849–1917), њемачки математичар

Нека је дат произвољни ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{15}$$

Нека су $A_0 = a_0$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbf{N}$, парцијалне суме реда (15). Формирајмо низ чији су чланови аритметичке средине парцијалних сума реда (15), тј.

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1}, \quad \ldots$$

Ако низ (α_n) има граничну вриједност $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, тада се број A назива „уопштеном (у смислу Чезара) сумом" реда (15).

Непосредно из дефиниције својства линеарности аритметичких средина и Кошијеве теореме слиједи својство регуларности метода.

Као примјер напријед реченог разматраћемо функционални ред

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{16}$$

који дивергира за свако x, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Заиста, ако је $x = \frac{p}{q}\pi$, $p, q \in \mathbf{N}$, тада је за $n \in \mathbf{N}$ који су дјељиви са q, $\cos nx = \pm 1$. Отуда слиједи да није задовољен неопходан услов за конвергенцију реда. Ако је количник $\dfrac{x}{\pi}$ ирационалан, тада разлажући га на бесконачан непрекидан разломак и узимајући потребне разломке $\dfrac{m}{n}$, имаћемо, као што је познато, $\left|\dfrac{x}{\pi} - \dfrac{m}{n}\right| < \dfrac{1}{n^2}$, па је $|nx - m\pi| < \dfrac{\pi}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

На тај начин за бесконачно много вриједности $n \in \mathbf{N}$, $|\cos nx \pm 1| < \dfrac{\pi}{n}$, па је $|\cos nx| > 1 - \dfrac{\pi}{n}$. Отуда слиједи, поново, да није задовољен неопходан услов за конвергенцију бројног реда.

Парцијалне суме $S_0(x) = \dfrac{1}{2}$, $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$, $n \in \mathbf{N}$, реда (15) називају се Дрихлеовим[13] језгрима и означавају се са $D_n(x)$, $D_n(x) = S_n(x)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Дирихлеова језгра играју кључну улогу у теорији Фуријеових редова. Она улазе у интегрално приказивање парцијалних сума Фуријеових редова произвољне интеграбилне на сегменту $[-\pi, \pi]$ функције у смислу Римана[14] (Лебега[15]).

[13] P. G. L. Dirichlet (1805–1859), њемачки математичар
[14] B. Riemann (1826–1866), њемачки математичар
[15] H. Lebesgue (1875–1941), француски математичар

Простим рачуном се, за $x \neq 0$, добија

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx\right] \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \qquad n \in \mathbf{N}\cup\{0\}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.
\end{aligned}$$

Нијоје тешко добити и аритметичке средине

$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha_n(x) &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x \\
&= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{n}(\cos mx - \cos(m+1)x) \\
&= \frac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, \qquad n \in \mathbf{N}\cup\{0\}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Функције $\alpha_n(x)$, $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, називају се Фејеровим[16] језгрима.

Како је $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x) = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $x \neq 0$, тада ред (16) методом аритметичких средина има за уопштену суму нулу. То игра важну улогу у рјешавању проблема конвергенције Фуријеових редова (погл. нпр. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Аљанчић, *Увод у реалну и функционалну анализу*, Грађевинска књига, Београд 1974, с. 326.

[2] В. И. Гаврилов, Ж. Павићевић, *Математичка анализа I*, ПМФ, Подгорица, 1994, с. 531.

[16] L. Fejér (1880–1959), мађарски математичар