ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Радунка Момчиловић

ФУНКЦИЈЕ $[x]$ И $\{x\}$

избор задатака

1. У првом разреду средњих школа обрађује се и функција $[x]$ (највећи цео број који није већи од x), као пример функције која је део по део линеарна. Наведимо основна својства те функције; њима се можемо користити при решавању задатака који следе. Често се користи ознака $[x] = E(x)$, што потиче од почетног слова француске речи entier (цео) и $[x]$ чита као „цео део од x".

1° Домен функције $[x]$ је цео скуп $\mathbf{R}$. Она пресликава $\mathbf{R}$ на скуп $\mathbf{Z}$ целих бројева; при томе је сваки цео број k слика бесконачно много реалних бројева — за све $x \in [k, k+1)$ важи $[x] = k$.

2° На основу дефиниције лако цртамо график функције $y = [x]$, сл. 1. Са графика се једноставно „читају" многа својства функције: а) она расте, али не расте строго; б) непрекидна је за све $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; в) у целобројним тачкама има прекиде прве врсте (у њима је непрекидна здесна, има и леви лимес, али се леви и десни лимес разликују за 1).

Сл. 1

Сл. 2

2. Помоћу функције $[x]$ дефинише се функција $\{x\}$:

$$\{x\} = x - [x]$$

(читамо „разломљени део од x"). За њу важи:

1° Домен функције $\{x\}$ је цео скуп $\mathbf{R}$. Она пресликава $\mathbf{R}$ на скуп $[0, 1)$.

2° На основу дефиниције лако цртамо и график функције $y = \{x\}$, сл. 2. Са графика једноставно „читамо" даља својства те функције: а) за све $x \in \mathbf{R}$ је $0 \leqslant x < 1$; б) има бесконачно много нула — за све $x \in \mathbf{Z}$ је $\{x\} = 0$; в) непрекидна је за све $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; г) у свим целобројним тачкама има прекиде прве врсте (у њима је функција непрекидна здесна, има и леви лимес, али се леви и десни лимес разликују за по 1); д) периодична је и основни период јој је 1.

3. Задаци

1. Графички представити функцију $f(x) = |[x]|$.

График је на слици 3. Навести својства ове функције.

Сл. 3 Сл. 4

2. Графички представити функције:

а) $f(x) = [x]\operatorname{sgn} x$; б) $f(x) = [|x|]$; в) $y = e^{\ln|[x]|}$.

Упоредити добијене графике са графиком претходне функције. Које су од наведених функција једнаке?

3. Графички представити функцију $f(x) = x[x]$ и анализирати њена својства.

График је на слици 4.

4. Нацртати график функције $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$.

Функција није дефинисана у интервалу $0 \leqslant x < 1$. График се састоји од полузатворених одсечака. Они припадају правим које пролазе кроз координатни почетак. Крајеви одсечака (у којима су они затворени) припадају правој $y = 1$, сл. 5.

Сл. 5 Сл. 6

5. Нацртати график функције $f(x)=[\sin x]$.

Користећи се чињеницом да је

$$[\sin x]=\begin{cases}0, & \text{за } x\in[2k\pi,\pi/2+2k\pi),\\ 1, & \text{за } x=\pi/2+2k\pi,\\ 0, & \text{за } x\in[\pi/2+2k\pi,(2k+1)\pi),\\ -1, & \text{за } x\in(\pi+2k\pi,2(k+1)\pi),\end{cases}\qquad k\in\mathbf{Z},$$

добијамо график функције $y=f(x)$ на слици 6.

6. Испитати и графички представити функције:

а) $f(x)=x+[x]$; б) $f(x)=[x]^{[x]}$; в) $f(x)=x^2-[x]^2$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{[x]}$; д) $f(x)=[\cos x]$.

Решити једначине (задаци 7–16.)

7. а) $[x-2{,}7]=3$; б) $[3x+\frac12]=-1$; в) $[2{,}1-x]=1{,}5$.

При решавању се користи неједнакост $[a]\leqslant a<[a]+1$.

Решења: а) $3\leqslant x-2{,}7<4$, $x\in[5{,}7;6{,}7)$.

б) $-1\leqslant 3x+\frac12<0$, $-\frac32\leqslant 3x<-\frac12$, $x\in[-\frac12;-\frac16)$.

в) Нема решења јер је $[a]\in\mathbf{Z}$.

8. а) $\{2x+\frac13\}=\frac15$; б) $\{x-\frac74\}=\frac12$; в) $\{2x+\frac25\}=\frac43$.

При решавању се користи својство $\{a+k\}=\{a\}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Решења: а) $2x+\frac13=\frac15+k$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{1}{15}+\frac{k}{2}$; $x\in\{\,-\frac{1}{15}+\frac{k}{2}\mid k\in\mathbf{Z}\,\}$.

б) $x-\frac74=\frac12+k$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\frac94+k$; $x\in\{\,\frac94+k\mid k\in\mathbf{Z}\,\}$.

в) $\varnothing$, јер је $0\leqslant\{a\}<1$.

9. а) $[x]^2-3[x]+2=0$; б) $[x]^2+3[x]+10=0$; в) $6[x]^2-5[x]+1=0$.

Решења: а) $[x]=1\vee[x]=2$; $x\in[1,3)$.

б) $[x]=-5\vee[x]=2$; $x\in[-5,-4)\cup[2,3)$.

в) $[x]=\frac13\vee[x]=\frac12$, што није могуће јер је $[a]\in\mathbf{Z}$.

10. а) $8\{x\}^2-6\{x\}+1=0$; б) $2\{x\}^2-9\{x\}+4=0$;в) $\{x\}^2-4\{x\}+3=0$.

Решења: а) $\{x\}=\frac14\vee\{x\}=\frac12$; $x=\frac14+k_1\vee x=\frac12+k_2$, $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$.

б) $\{x\}=4\vee\{x\}=\frac12$; $x=\frac12+l$, $l\in\mathbf{Z}$.

в) $\{x\}=1\vee\{x\}=3$; нема решења.

11. а) $[x^2-5x+6]=1$; б) $[x^2-x+4]=2$.

Решења: а) Дата једначина је еквивалентна двострукој неједначини $1\leqslant x^2-5x+6<2$, тј.

$$\left(x\leqslant\frac{5-\sqrt5}{2}\vee x\geqslant\frac{5+\sqrt5}{2}\right)\wedge 1<x<4,$$

одакле је $x\in\left(1,\dfrac{5-\sqrt5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt5}{2},4\right)$.

б) $2 \leqslant x^2-x+4 < 3 \iff x^2-x+2 \geqslant 0 \wedge x^2-x+1 < 0 \iff (x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4} \geqslant 0 \wedge (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} < 0$, што је немогуће. Дакле, једначина нема решења.

12. а) $[x^2]=4$; б) $[x]^2=4$; в) $[2^x]=0$;
г) $[2^x]=2$; д) $16^{\{x\}}=4$; ђ) $2^{\{x\}}=0{,}8$.

Решења: а) $x \in (-\sqrt{5},-2] \cup [2,\sqrt{5})$; б) $x \in [-2,-1) \cup [2,3)$; в) $x \in (-\infty,0)$; г) $x \in [\log_2 2, \log_2 3)$; д) $x \in \{\,\frac{1}{2}+k \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$; ђ) како је $0 \leqslant \{x\} < 1$ и зато $2^{\{x\}} > 1$, дата једначина нема решења.

13. а) $x+[x]+\{x\}=0$; б) $\{x\}-[x]+x=0$; в) $x-2[x]=1$.

При решавању ових једначина користимо једнакост $[x]+\{x\}=x$.

Решења: а) $x+x=0$, дакле $x=0$.
б) $\{x\}-[x]+[x]+\{x\}=0$, одакле $2\{x\}=0$, односно $x \in \mathbf{Z}$.
в) $x=-1$.

14. а) $9^{\{x\}}+9^{\{x+9\}}=6$; б) $9^{[x]}-6\cdot 3^{[x]}+5=0$;
в) $4^{[x]}+5\cdot 2^{[x]}+4=0$; г) $25^{2\{x\}}-6\cdot 25^{\{x\}}=0$.

Решења: а) $9^{\{x\}}+9^{\{x+9\}}=6 \iff 9^{\{x\}}+9^{\{x\}}=6 \iff 9^{\{x\}}=3 \iff \{x\}=\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{2}+k,\ k \in \mathbf{Z}$.

б) $9^{[x]}-6\cdot 3^{[x]}+5=0 \iff 3^{[x]}=1 \vee 3^{[x]}=5 \iff [x]=0 \iff x \in [0,1)$, јер $3^{[x]}=5$ није могуће (степен броја 3 целобројним изложиоцем не може бити једнак 5).

в) $4^{[x]}+5\cdot 2^{[x]}+4=0 \iff 2^{[x]}=1 \vee 2^{[x]}=4 \iff [x]=0 \vee [x]=2 \iff x \in [0,1) \cup [2,3)$.

г) $25^{2\{x\}}-6\cdot 25^{\{x\}}=0 \iff 25^{\{x\}}=1 \vee 25^{\{x\}}=5 \iff \{x\}=0 \vee \{x\}=\frac{1}{2} \iff x \in \mathbf{Z} \vee x=\frac{1}{2}+k,\ k \in \mathbf{Z}$.

15. а) $||x|-[x]|=[|x|-[x]]$; б) $\left[\dfrac{2x}{\pi}-3\right]=\cos x$;
в) $\sqrt{[-7x^2+3x+4]}=[2-\sin x]$; г) $[\sin x]=[\cos x]$;
д) $[\sin x+\cos x]=0$; ђ) $[\sin x+\cos x]=1$.

Решења: а) Како је $|x| \geqslant x \geqslant [x]$, то је $||x|-[x]|=|x|-[x]$. Како је $[x]$ цео број и десна страна је цео број, одатле следи $|x|=[|x|]$. Дакле, сви цели бројеви су решења дате једначине.

б) Како $\cos x$ може од целобројних вредности да узима само -1, 0 и 1, једначина је еквивалентна дисјункцији једначина

$$\left[\frac{2x}{\pi}-3\right]=-1 \vee \left[\frac{2x}{\pi}-3\right]=0 \vee \left[\frac{2x}{\pi}-3\right]=1,$$

одакле је $x=\pi \vee x=\dfrac{3\pi}{2} \vee x=2\pi$.

в) Неједнакост $[-7x^2+3x+4] \geqslant 0$ је еквивалентна са $-7x^2+3x+4 \geqslant 0$, тј. $-\dfrac{4}{7} \leqslant x \leqslant 1$. У овој области израз $[2-\sin x]$ има само две вредности, 2 и 1.

Због тога је дата једначина еквивалентна дисјункцији система

$$\begin{cases} [-7x^2+3x+4]=1 \\ [2-\sin x]=1 \end{cases} \vee \begin{cases} [-7x^2+3x+4]=4 \\ [2-\sin x]=2 \end{cases}$$

Решавањем се добија $x=0 \vee x \in \left(\dfrac{3+\sqrt{65}}{14}, \dfrac{3+\sqrt{93}}{14}\right]$.

г) Како је $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, то су њихове могуће целобројне вредности -1, 0, 1. Могућа су три случаја:

1) $[\sin x]=[\cos x]=-1$, тј. $-1 \leqslant \sin x < 0 \wedge -1 \leqslant \cos x < 0$, одакле $x \in (\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $[\sin x]=[\cos x]=0$, тј. $0 \leqslant \sin x < 1 \wedge 0 \leqslant \cos x < 1$, одакле $x \in (2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $[\sin x]=[\cos x]=1$. Систем је немогућ, јер ни за које x, $\sin x$ и $\cos x$ нису истовремено једнаки 1.

д) Из $0 \leqslant \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) < 1$ добијамо $0 \leqslant \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \vee \dfrac{\pi}{4}+2k\pi < x-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ и $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

ђ) $[\sin x+\cos x]=1 \iff 1 \leqslant \sin x+\cos x < 2 \iff 1 \leqslant \sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) < 2 \iff 1 \leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) < 2 \iff \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} \iff x \in \left[2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

16. $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{4x+1}{6}\right]=\dfrac{5x-4}{3}$.

Решење: Замена $\dfrac{2x-1}{3}=y$ даје $[y]+\left[y+\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{5y-1}{2}$. Узевши у обзир да је $[y]+\left[y+\dfrac{1}{2}\right]=[2y]$ добијамо $[2y]=\dfrac{5y-1}{2}$. Новом заменом $\dfrac{5y-1}{2}=k$ имамо $\left[\dfrac{4k+2}{5}\right]=k$, $k \in \mathbf{Z}$. Последња једначина значи да је $k \leqslant \dfrac{4k+2}{5} < k+1$, одакле $-3 < k \leqslant 2$. Могуће вредности за k су: -2, -1, 0, 1, 2, па је $x \in \left\{-\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{5}, 2\right\}$.

Решити системе једначина (задаци 17–20.):

17. а) $\begin{cases} 2[x]+3[y]=8 \\ 3[x]-[y]=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\{x\}-3\{y\}=1 \\ 2\{x\}+4\{y\}=2. \end{cases}$

Решења: а) Систем је еквивалентан са $[x]=1$ и $[y]=2$, па је скуп решења $\{\,(x,y)\mid x\in[1,2), y\in[2,3)\,\}$.

б) $\{\,(x,y)\mid x=\frac{5}{7}+k, y=\frac{1}{7}+k, k\in\mathbf{Z}\,\}$.

18. а) $\begin{cases} [x+y+4]=18-y \\ [x+1]+[y-1]=18-x-y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} [x]+[y-2]=5-x \\ [x+3]=-x-y+6. \end{cases}$

Решења: а) Како су леве стране прве и друге једначине цели бројеви, систем има решења само ако су и десне стране цели бројеви. Одатле следи да су x и y цели бројеви. У таквом случају дати систем једначина еквивалентан је систему

$$\begin{cases} x+y+4=18-y \\ x+1+y-1=18-x-y, \end{cases}$$

чије је решење пар $(4,5)$.

19. а) $\begin{cases} [x]+[y]+[z]=1 \\ 2[x]-[y]+[z]=0 \\ [x]-2[y]+[z]=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} [x]+[y]+\{z\}=1{,}1 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}3. \end{cases}$

Решења: а) $\{\,(x,y,z)\mid x\in[1,2); y\in[1,2); z\in[-1,0)\,\}$.

б) Како је $[a]+\{a\}=a$, сабирањем добијамо $2x+2y+2z=6{,}6$, тј. $x+y+z=3{,}3$.

Из прве две једначине следи $x+\{x\}+y+[y]+[z]+\{z\}=3{,}3$, па из претходног добијамо $[y]+\{x\}=0$, одакле $[y]=0$ и $\{x\}=0$. Дакле, мора бити $x\in\mathbf{Z}$, а $y\in[0,1)$, па прва једначина система има облик $x+\{z\}=1{,}1$. Одатле је $x=1$ и $\{z\}=0{,}1$. Друга једначина добија облик $y+[z]=2{,}2$, па је $[z]=2$ и $y=0{,}2$. Дати систем има јединствено решење $(2;0{,}2;2{,}1)$.

20. а) $\begin{cases} x^2-[x]=2 \\ x^3-3[x]=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+[x]^2=12 \\ x^4-[x]^2=12. \end{cases}$

Решења: а) $(-1,2)$; б) 2.