др Мирјана Ђорић, др Павле Младеновић, др Милош Арсеновић

МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА 1997. ГОДИНЕ

ПРВА БАЛКАНСКА ОСНОВНОШКОЛСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Београд, 18–22. 06. 1997.

Прва балканска основношколска математичка олимпијада (1. БОМО) одржана је од 18. до 22. јуна ове године у Београду. Организатор ове олимпијаде био је Савез друштава математичара Југославије, а домаћини такмичења су били ученици и наставници ОШ „Милош Црњански" из Београда.

Такмичење су, уз пригодан културно-уметнички програм, отворили председник Савеза друштава математичара Југославије, др Владимир Мићић и потпредседник Владе СР Југославије, мр Никола Шаиновић. После успешно решених задатака учесници такмичења су своје слободно време искористили за разгледање Београда, посете позоришним представама, концертима и дружење. За учеснике такмичења и њихове домаћине је 21. јуна организован излет до Деспотовца, манастира Манасије и Ресавске пећине.

Завршна свечаност прве БОМО одржана је у Влади СР Југославије, где је председник жирија, др Мирјана Ђорић уручила награде учесницима, а савезни министар за информисање, Иван Матић је затворио такмичење.

Несебичну помоћ у организацији прве БОМО пружили су Влада СР Југославије, Завод за израду новчаница, „Соко Штарк", „Беобанка", Математички лист за ученике основне школе и многи ентузијасти који су својим личним залагањем допринели да Југославија буде успешан домаћин ове манифестације.

Пропозиције БОМО су такве да ученици четири сата решавају пет задатака, од којих сваки носи по 10 поена. Свака земља учесница има право да предложи највише пет задатака из следећих области: елементарна теорија бројева, пропорције и проценти, линеарне једначине са једном непознатом и примене, системи линеарних једначина са две непознате и примене, линеарне неједначине и системи линеарних неједначина са једном непознатом, алгебарски изрази, докази и мерење у планиметрији (без сличности и Питагорине теореме), логичко-комбинаторни задаци. Како је ове године на олимпијади учествовало тачно пет земаља, жири је донео одлуку да се од 24 предложена задатка изабере по један предлог сваке земље учеснице.

ЗАДАЦИ:

1. Девет тачака је распоређено у јединичном квадрату. Доказати да међу њима постоје три тачке такве да површина троугла коме су оне темена није већа од 1/8.

2. Уколико је $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$, изразити $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ у функцији од k.

3. Нека је I центар круга уписаног у дати троугао ABC, а D и E редом средишта страница AB и AC. Нека су, даље, K и L пресечне тачке праве DE редом са BI и CI. Доказати да је

$$AI+BI+CI>BC+KL.$$

4. Наћи углове троугла ABC уколико је $R(b+c)=a\sqrt{bc}$, при чему су a, b и c странице троугла ABC, а R је полупречник круга описаног око овог троугла.

5. Ако су $n_1,n_2,\ldots,n_{1997},n_{1998}$ природни бројеви такви да је

$$n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2=n_{1998}^2,$$

доказати да су бар два од тих бројева парни.

Право учешћа на балканској основношколској олимпијади (по правилнику), имају ученици млађи од 15.5 година. Екипе су петочлане, а поред Југославије на овој Олимпијади учешће су узеле и екипе Бугарске, Грчке, Кипра и Македоније.

У званичној појединачној конкуренцији чланови југословенске екипе постигли су следеће резултате: златну медаљу су освојили Томислав Радић, ученик осмог разреда ОШ „Боривоје Милојевић“, Крупањ и Драган Прекрат, ученик осмог разреда ОШ „Бранко Радичевић“, Панчево; сребрну медаљу освојио је Владимир Лазић, ученик осмог разреда ОШ „Милан Ракић“, Нови Београд; бронзану медаљу освојила је Карола Месарош, ученица осмог разреда ОШ „VIII ВУБ“, Суботица; похвалу је освојио најмлађи учесник олимпијаде, Ненад Јовановић, ученик седмог разреда ОШ „Бранко Радичевић“, Нови Београд.

У незваничном екипном пласману, који се одређује према укупном збиру поена, највише успеха имала је екипа Бугарске, а затим следи екипа Југославије.

др Мирјана Ђорић
председник Жирија 1. балканске
основношколске математичке олимпијаде

38. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Мар дел Плата, Аргентина, 24. и 25. јули 1997.

У времену од 18. до 31. јула одржана је 38. Међународна математичка олимпијада у Мар дел Плати (Аргентина). На овој Олимпијади учествовале су шесточлане екипе из 82 земље са свих континената. У званичној појединачној конкуренцији чланови југословенске екипе постигли су следеће резултате: сребрне медаље освојили су Душан Ђукић и Никола Петровић, ученици другог разреда Математичке гимназије у Београду; бронзане медаље освојили су Јелена Спасојевић, ученица трећег разреда Математичке гимназије у Београду, Раде Станојевић, ученик другог разреда гимназије „Светозар Марковић" у Нишу и Бранислав Цветковић, ученик трећег разреда Математичке гимназије у Београду. Члан наше екипе био је и Иван Вељковић, ученик четвртог разреда гимназије „Вук Караџић" у Лозници.

У незваничном екипном пласману, који се одређује према укупном збиру поена, највише успеха имала је екипа Кине, а затим следе екипе Мађарске, Ирана, Русије и Сједињених Америчких Држава, Украјине итд. Наша екипа заузела је двадесето место.

ЗАДАЦИ

Први дан

1. Тачке са целим координатама у равни су темена јединичних квадрата. Квадрати су наизменично обојени црно и бело (као на шаховској табли). За сваки пар позитивних целих бројева m и n, разматрамо правоугли троугао чија темена имају целе координате и чије катете, дужине m и n, леже на страницама квадрата. Нека је S_1 укупна површина црног дела троугла и S_2 укупна површина његовог белог дела. Нека је

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(а) Израчунати $f(m,n)$ за све позитивне целе бројеве m и n који су или оба парни или оба непарни.

(б) Доказати да је $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за све m и n.

(в) Доказати да не постоји константа C таква да је $f(m,n) < C$ за све m и n.

2. Угао A је најмањи у троуглу ABC. Тачке B и C деле описану кружницу троугла на два лука. Нека је U унутрашња тачка лука између B и C који не садржи A. Симетрале дужи AB и AC секу праву AU редом у тачкама V и W. Праве BV и CW секу се у T. Доказати да је

$$AU = TB + TC.$$

3. Нека су x_1, x_2, …, x_n реални бројеви који задовољавају услове:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \qquad \text{и} \qquad |x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \quad \text{за} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказати да постоји пермутација $y_1, y_2, \ldots, y_n$ бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таква да је
$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Други дан

4. Матрица $n \times n$ (квадратна таблица) чији су чланови елементи скупа $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ назива се *сребрна* матрица ако, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, i-та врста и i-та колона заједно садрже све елементе из S. Доказати да:

(а) не постоји сребрна матрица за $n = 1997$;

(б) сребрне матрице постоје за бесконачно много вредности n.

5. Наћи све парове (a, b) целих бројева $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, који задовољавају једначину:
$$a^{b^2} = b^a.$$

6. За сваки позитиван цео број n, нека $f(n)$ означава број представљања броја n у облику збира степена броја 2 са ненегативним целим експонентима. Репрезентације које се разликују само у редоследу њихових сабирака сматрају се истим. На пример, $f(4) = 4$, јер број 4 може бити представљен на следећа четири начина: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Доказати да за сваки цео број $n \geqslant 3$ важи
$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

На међународној математичкој олимпијади традиционално се решава шест задатака у току два дана. Задаци се бирају из следећих области: геометрија, теорија бројева, алгебра и комбинаторика. Ове године је било више задатака у којима се преплићу различите области, а све традиционалне области су биле заступљене. Задаци који се предлажу на Међународној математичкој олимпијади су различите тежине и сложености. Међу њима обавезно има задатака који су доступни већини ученика (такав је на пример задатак 2). Такође се предлажу и задаци који би могли бити увод у дубља истраживања. На пример, у вези са задатком 6, интересантно је питање асимптотске или тачне формуле за број свих представљања броја 2^n у облику збира сабирака облика 2^k. Добар увод у теорију разбијања скупова и бројева може представљати књига Andrews, G.E.: *The Theory of Partitions*, Addison–Wesley, London, 1976.

др Павле Младеновић,
руководилац југословенске екипе
на 38. Међународној математичкој олимпијади

ЧЕТВРТО МЕЂУНАРОДНО ТАКМИЧЕЊЕ СТУДЕНАТА

Пловдив, Бугарска, 30. 07–04. 08. 1997.

Четврто међународно такмичење студената математике у Пловдиву, Бугарска, одржано је у периоду од 30. јула до 4. августа ове године. Учествовали су студенти следећих универзитета: Adam Mickiewicz University, Cambridge University, Charles University Prague, Comenius University, Complutense University Madrid, Ecole Normale Superieure Paris, Hebrew University Jerusalem, Kharkov State University, Lorand Eotvos University, Oxford University, Tarty University, University College London, University of Belgrade, University of Blagoevgrad, University of Ljubljana, University of Nis, University of Plovdiv, University of Shoumen, University of Sofia, University of Veliko Trnovo, University of Zaragosa, Warsaw University.

Такмичари су решавали задатке током два дана, сваког дана су имали на располагању по пет сати за шест задатака. У екипи Математичког факултета Универзитета у Београду су учествовали Владимир Балтић (четврта година студија), Велибор Тинтор (трећа година), Марко Стошић и Ђорђе Милићевић (студенти прве године). Милићевић је освојио прву награду, Стошић и Тинтор другу награду а Балтић трећу награду.

Први дан

1. Нека је $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ позитивних бројева такав да је $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Наћи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right).$$

2. Нека ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Да ли тада следећи редови морају такође конвергирати?

а) $a_1+a_2+a_4+a_3+a_8+a_7+a_6+a_5+a_{16}+a_{15}+\cdots+a_8+a_{32}+\cdots$;

б) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_7+a_6+a_8+a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{17}+a_{19}+\cdots$.

Оправдати дате одговоре.

3. Нека су A и B реалне $n\times n$ матрице такве да је $A^2+B^2=AB$. Доказати да ако је $BA-AB$ инвертибилна матрица, онда је n дељиво са 3.

4. Нека α реалан број, $1<\alpha<2$.

а) Показати да α има јединствену репрезентацију у облику бесконачног производа $\alpha=\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\cdots$, где су n_i природни бројеви такви да је $n_i^2\leqslant n_{i+1}$.

б) Доказати да је α рационалан ако и само ако за неко m важи $n_{i+1}=n_i^2,\quad i=m,m+1,\ldots$.

5. За дати природан број n посматрајмо хиперраван $R_0^n=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$ и мрежу $\mathbf{Z}_0^n=\{y\in\mathbf{R}_0^n:$ сви y_i су цели бројеви$\}$. Дефинишимо (квази) норму на $\mathbf{R}^n$ изразом $\|x\|=(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}$ ако је $0<p<\infty$, и $\|x\|_\infty=$

$\max_i |x_i|$. Нека је $x \in \mathbf{R}_0^n$ такво да је $\max_i x_i - \min_i x_i \leqslant 1$. Доказати да за свако $p \in [1, +\infty]$ и свако $y \in \mathbf{Z}_0^n$ важи $\|x\|_p \leqslant \|x+y\|_p$.

6. Претпоставимо да је F фамилија коначних подскупова скупа $\mathbf{N}$ природних бројева и да за свака два скупа $A, B \in F$ имамо $A \cap B \neq \emptyset$.
а) Да ли је тачно да постоји коначан подскуп Y од $\mathbf{N}$ такав да за било која два скупа $A, B \in F$ имамо $A \cap B \cap Y \neq \emptyset$?
б) Да ли је тврђење а) тачно ако још претпоставимо да сви чланови фамилије F имају исти број елемената?

Други дан

1. Нека је f три пута непрекидно диференцијабилна функција на $\mathbf{R}$, претпоставимо да је $f(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}$ и да је $f(0) = f'(0) = 0 < f''(0)$. Нека је $g(x) = (\sqrt{f(x)}/f'(x))'$ за $x \neq 0$ и $g(0) = 0$. Доказати да је g ограничена у некој околини нуле.

2. Нека је M инвертибилна матрица димензије $2n \times 2n$, представљена у блок форми $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ и $M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, где су $A, B, \ldots, H$ матрице димензије $n \times n$. Доказати да је $\det M \det H = \det A$.

3. Доказати да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \sin(\log n)}{n^{\alpha}}$ конвергира ако и само ако је $\alpha > 0$.

4. а) Нека је пресликавање $f\colon M_n \to \mathbf{R}$ из простора $M_n = \mathbf{R}^{n^2}$ свих $n \times n$ матрица са реалним члановима у реалне бројеве линеарно, то јест, нека важи $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $f(cA) = cf(A)$ за све $A, B \in M_n$, $c \in \mathbf{R}$. Доказати да постоји јединствена матрица $C \in M_n$ таква да је $f(A) = \operatorname{tr}(AC)$ за све $A \in M_n$. (Ако је $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, онда је $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$).
б) Претпоставимо да још важи и $f(AB) = f(BA)$ за све $A, B \in M_n$. Доказати да тада постоји $\lambda \in \mathbf{R}$ такво да је $f(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$ за свако $A \in M_n$.

5. Нека је X произвољан скуп, нека је f бијекција скупа X на себе. Доказати да постоје пресликавања $g_1, g_2\colon X \to X$ таква да је $f = g_1 \circ g_2$ и $g_1 \circ g_1 = id = g_2 \circ g_2$, где id означава идентичко пресликавање на скупу X.

6. Нека је $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Кажемо да f „прелази осу“ у тачки x ако је $f(x) = 0$ и ако у свакој околини тачке x постоје y, z такви да је $f(y) < 0$ и $f(z) > 0$.
а) Дати пример непрекидне функције која прелази осу у бесконачно много тачака.
б) Може ли непрекидна функција прелазити осу у непребројиво много тачака? Оправдати одговор.

др Милош Арсеновић
руководилац екипе Математичког факултета