Јасмина Милинковић

О ВРЕДНОВАЊУ МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА

Значајна компонента остваривања наставе сваког предмета је систематско праћење и вредновање резултата које ученици постижу, како у квантитативном тако и у квалитативном смислу. Наставни процес, институционализован кроз школски систем, доводи ученике у ситуацију да њихови резултати бивају редовно проверавани и оцењивани, описним или бројчаним оценама. Они су свесни да ће њихово знање бити оцењено и сигурно је да им информације о томе шта ће бити оцењено, како ће и када бити вредновано и који ће критеријуми бити примењени приликом оцењивања помажу да своја интересовања и способности усмере у жељеном правцу и усагласе са својим амбицијама.

У широј, па и просветној јавности присутна је заблуда да је вредновање знања у математици једноставније него у другим предметима, лакше се обезбеђује објективност и прецизност приликом оцењивања, а квантитативни показатељи се лако изводе по принципу „тачно-нетачно“ или путем адекватног „поентирања“, што карактер математичких знања омогућава.

Слободни смо устврдити да је такво схватање присутно и код дела наставника математике, пре свега оних који се према питању вредновања математичких знања односе „традиционално“. Под тим подразумевамо схватање да се учење математике у школи састоји од сазнавања и усвајања одређених чињеница, савлађивања одређених вештина и умења, при чему је наставник онај који наставну грађу предаје, кроз тај чин открива ученицима нове математичке истине, организује увежбавање научених поступака, а затим проверава ниво усвојености тих знања од стране ученика. У таквом приступу већина ученика учи кроз имитирање и запамћивање онога што су видели, чули, записали. „Апсолутно објективни“ контролни задаци, писмени задаци и тестови, сматрају приврженици овог приступа настави, биће најбољи начин да се провери ниво усвојености нових знања. При томе се заборавља да тачно решен задатак не гарантује да је ученик заиста разумео односну материју и да суверено влада њоме. Илустроваћемо ово са два примера, који се односе на исти појам (обим многоугла), али је први намењен ученицима млађих разреда основне школе (III и IV разред), док би други могао наћи место у старијим разредима основне школе (у V разреду).

Пример 1. На слици је нацртан троугао, при чему природни бројеви, записани поред његових страница, представљају мерне бројеве дужина тих страница, мерених центиметрима. Наћи обим троугла.

Јасно је да ће ученик који је усвојио појам обима троугла сигурно решити овај задатак, сабирањем записана три броја. Чињеница је, међутим, да ће и значајан број ученика, који тај појам нису усвојили, претпоставити да се од њих очекује да наведене бројеве саберу. И сабраће их (а и шта би друго урадили?). На тај начин ће и једни и други тачно решити задатак и одговарајући контролни задатак или тест неће дати праву слику њиховог знања.

Пример 2. На слици је нацртан многоугао, при чему природни бројеви, записани поред његових страница, представљају мерне бројеве дужина тих страница, мерених центиметрима. Наћи обим тог многоугла.

Коментар уз први пример може се поновити и уз овај пример, при чему ћемо реч троугао заменити речју многоугао и уместо реченице „ ... , сабирањем записана три броја.“ написати реченицу „ ... , сабирањем свих записаних бројева.“.

Мишљења смо да би реалнију слику о усвојености појма обима троугла, односно многоугла, дали следећи, нешто комплекснији задаци.

Пример $1'$ Дужине страница троугла, мерених центиметрима, изражавају се природним бројевима. Нацртати два различита троугла обима од по 14 cm.

Пример $2'$ Дужине страница многоугла, мерених центиметрима, изражавају се природним бројевима. Нацртати два различита многоугла обима од по 22 cm.

Ученик трећег или четвртог разреда, који је усвојио појам обима троугла, уз мало размишљања ће закључити да, у ствари, број 14 треба представити у облику збира три сабирка. Али, покушаји да нацрта троугао помоћу таквим сабирцима кореспондираних дужи, увериће га да то не могу бити било која три таква сабирка. Цртањем, што значи експериментално, увериће се да може, на пример, нацртати троугао чије су дужине страница 3 cm, 5 cm и 6 cm, али да не може нацртати троугао чије су дужине страница 2 cm, 4 cm и 8 cm, као ни троугао чије су дужине страница 1 cm, 6 cm и 7 cm. Просечан ученик, који је усвојио појам, нацртаће, на пример, троуглове чије су дужине страница 3 cm, 5 cm, 6 cm односно 2 cm, 6 cm, 6 cm и тиме се задовољити. Решио је задатак. Али, наћи ће се сигурно неколико ученика у одељењу који се тиме неће задовољити и покушаће да нађу све тројке дужи које задовољавају услове задатка, а могу се помоћу њих конструисати (нацртати) троуглови. Закључци типа:

- дужина најдуже од њих не може бити већа од 6;
- збир двеју од њих мора бити већи од треће;
- свака је таква дуж краћа од половине обима

и слични, драгоцени су и, у ствари, представљају етапе на путу према открићу познатог својства троугла, израженог тзв. неједнакошћу троугла. Поменуто налажење свих таквих тројки сведочи о способностима ученика за уочавање свих комбинаторних могућности, што је исто тако вредно подстицати и неговати кроз наставу математике.

Ученик петог разреда ће, под претпоставком да је претходно добио и усвојио информацију да је дужина многоугаоне линије, па и обим многоугла, једнак збиру дужина дужи (страница), вероватно без тешкоћа нацртати, на пример, један четвороугао и један петоугао, или један петоугао и један шестоугао, или два петоугла и сл, представљајући број 22 у облику збира четири, пет или шест сабирака. Али, појавиће се при томе и решење облика $22 = 1 + 2 + 3 + 4 + 12$; ми их морамо очекивати и припремити објашњење, најбоље непосредно помоћу цртежа, зашто такав петоугао не постоји. Богатство могућности и слобода избора ће подстаћи заинтересоване ученике, са израженим способностима за креативан рад у области математике, да покажу своје комбинаторне способности, маштовитост, способност исправног закључивања. Поменимо неке од могућих закључака, без претензија да смо тиме обухватили све очекиване одговоре:

- многоуглови могу, али не морају имати исти број страница;
- дужина најдуже странице мора бити мања од збира дужина осталих страница;
- постоје различити четвороуглови, петоуглови, … , чије су све странице подударне, …

Подсетимо се да последњи од поменутих закључака не важи у случају троуглова. Наиме, свака два троугла чије су све три странице подударне, подударни су. То ће у шестом разреду бити једно од „правила подударности“ троуглова, а исказује се и као својство троугла да је он крута, недеформабилна фигура. Четвороуглови, петоуглови, … , нису круте фигуре.

Наставници којима смо предложили да се користе задацима оваквог типа били су подељеног мишљења. Док једни сматрају да су то задаци примерени могућностима ученика одговарајућег разреда и да могу добро послужити да се вреднује усвојено знање и процене способности ученика, други су мишљења да мноштво могућности и сложеност цртања фигура (многоуглова, троуглова) може деловати збуњујуће. Ова резерва је, свакако, последица и традиционалног приступа да задатак, по правилу, има тачно једно решење.

Пример 3. Ђорђе сакупља једнаке точкиће модела бицикала и трицикала. Сакупио је укупно девет таквих точкића. Колико би највише бицикала и трицикала Ђорђе могао да обезбеди точкићима? Нађи бар два решења.

Ми знамо да се овде ради о тзв. Диофантовој једначини $2b+3t=9$, чија решења (уређене парове (b,t)) тражимо у скупу уређених парова бројева из $\mathbf{N}_0$. Задатак се може поставити у III, IV или V разреду основне школе. Учениици ће, вероватно цртајући слике бицикала и трицикала, уз мале тешкоће наћи два решења, на пример

$$b=4, \quad t=0 \qquad \text{или} \qquad b=3, \quad t=1.$$

Морамо, у својству наставника, скренути пажњу ученицима да треба образложити зашто је највећи збир једнак 4. Очекујемо да ће известан број ученика у одељењу осетити потребу да понуди аргументацију за такав одговор. Сам покушај треба ценити, а успешан покушај значајно вредновати. У овом примеру поменута два решења су и сва решења, па и ова компонента одговора има своју вредност, иако у формулацији задатка није захтевано да се нађу сва решења.

Важно је напоменути да нису сви задаци и питања оваквог „отвореног“ типа подесни за вредновање знања. Наведимо пример једног питања.

Пример 4. Прикажи све што си до сада научио о разломцима.

Имајући у виду чињеницу да се појам разломка, операције и релације у вези с њима уводе постепено, таквом питању би место могло бити у различитим разредима. Али, потпуно је неизвесно да ли би, специјално ученици млађег узраста, успели да се снађу и заиста искажу све што знају. Ако се наставник ипак одлучи да овакво питање постави ученицима, томе треба да претходи посебна припрема.

Тестови. Већ смо поменули да се у наставној пракси, али и теорији, тестови сматрају поузданим извором информација о знању ученика, било да се ради о стандардизованим тестовима, којима се врши класификација (рангирање) ученика у одељењу или о тзв. тестовима „базираним на критеријумима", који утврђују знање ученика, поредећи његово достигнуће са унапред утврђеним стандардом и којима се верификује квалификација. Наше је мишљење да је повремено коришћење тестова корисно, али они не одражавају све квалитете ученика и његове способности у области математике.

Шта и како вредновати? Циљеви и задаци наставе математике су саставни део наставних планова и програма и разрађени су кроз одговарајућа дидактичко-методичка упутства. У њиховом остваривању је једна од значајних компоненти оцењивање; осврнимо се са неколико реченица на тај сегмент наставе математике.

Циљ оцењивања је да се добије информација о:

- структури математичког знања ученика;
- степену и квалитету организованости дотадашњег математичког искуства у свести ученика;
- промени математичких знања ученика (у погледу обима и квалитета) током школске године,

као и да укаже ученику на оно што наставник сматра важним у оквирима материје која се обрађује у математици.

Оцена треба да резултира из тзв. „*профила ученика*", који садржи информацију о томе како он:

- решава математичке задатке (какве стратегије примењује, зна ли шта значи стварно решити задатак, има ли изграђен осећај за проверу или други вид верификације);
- комуницира на часовима математике (како користи математички језик, како користи свакодневни језик, како користи специфичне ознаке);
- анализира математички проблем, размишља и закључује о њему (да ли је у стању да се користи индукцијом, дедукцијом, како образлаже своје доказе);
- разуме и користи математичке појмове и поступке, примере, моделе, уочава сличности и разлике, ... ;
- повезује математичко знање са свакодневним искуством и знањима из других области;
- схвата природу и улогу математичког приступа и закључивања у животу;
- како се, генерално, односи према математици.

Шта више а шта мање вредновати? У литератури је овој проблематици посвећено много простора, а слободни смо закључити да савремена педагошка теорија и пракса предлаже да се

више	мање
вреднује шта ученик зна и како размишља;	вреднује шта ученик не зна;
прати напредак ученика као саставни део наставног процеса;	вреднује број тачно решених задатака на писменом или број тачних одговора на тесту са искључивим циљем да се ученику додели бројчана оцена;
обрати пажња решавању комплексних задатака;	обрати пажња изолованом познавању поступака;
постављају задаци који захтевају познавање више математичких појмова и поступака;	постављају задаци који захтевају примену само једног или два поступка;
користе различите методе, укључујући обавезно усмене одговоре и „јавно“ демонстрирање знања (табла);	користе искључиво писани задаци и тестови;
користе помоћна средства;	ограничава коришћење помоћних средстава.

Уместо закључка. Наставна пракса у области математике је сложен и осетљив систем, па је важан допринос њеном успешном остваривању стална размена искустава, стално праћење литературе. То се односи и на вредновање знања ученика. Размена позитивних, успешних искустава, али и негативних, неуспешних, може допринети унапређивању наставе математике. Прилику за такву размену искустава пружа нам и наша рубрика „Мој час“. Искористимо је.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Assesment Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, USA, Reston, 1994.

[2] *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, USA, Reston, 1989.

[3] Stenmark, J. K. (Editor), *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, Practical Suggestions*, National Council of Teachers of Mathematics, USA, Reston, 1991.

[4] McAloon, A. F., *An Overview of Current Assessment Practices in Mathematics in the United States*, in: Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H., Suydam, M. (Editors), *Procedings of the Fourth International Congress on Mathematics Education*, Birkhäuser, Boston Inc, Boston 1983, pp. 550–553.