мр Бранко Ј. Малешевић

РАЦИОНАЛНЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА И НЕКЕ ПРИМЕНЕ

Правилни верижни разломци

У овом чланку излажемо нека основна својства верижних разломака. Такође се разматрају апроксимације реалних бројева разломцима и неке примене таквих апроксимација.

Прелазимо на излагање основних својстава верижних разломака. У такве разломке долазе на пример:

$$5+\frac{1}{2},\quad -5+\frac{1}{1+\frac{1}{100}},\quad \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}.$$

Уопште за задан цео број a_0 и задан коначан низ природних бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$, сложен разломак облика:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}}, \tag{1}$$

називамо *правилан коначан верижни развој* и означавамо га краће са $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Сваки правилан коначан верижни развој α може се довести до „обичног“ разломка $\frac{p_n}{q_n}$. Тако, горе наведеним верижним разломцима одговарају редом ови „обични“ разломци: $\frac{11}{2}$, $-\frac{405}{101}$, $\frac{7}{30}$. Обратно, сваки разломак α може се једнозначно приказати у облику коначног верижног развоја. Рецимо, разломак $\alpha = \frac{355}{113}$ може се овако „уверижити“:

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}}.$$

У току „уверижавања“ посматраном разломку одговарају „карике“ $\alpha = \dfrac{355}{113}$, $\alpha_1 = \dfrac{113}{16}$ и $\alpha_2 = 16$. Приметимо да задњу „карику“ 16 можемо заменити са $15 + \dfrac{1}{1}$. У вези са тим, уопште код верижног разломка (1) не допуштамо могућност $a_n = 1$. Истакнимо да уз такав услов сваком обичном разломку одговара тачно један правилан верижни разломак.

У претходном примеру „уверижавања“ примећујемо да вредност збира бројиоца и имениоца појединих „карика“ добија све мање вредности. Покажимо да наведено својство остаје и у општем случају. Тако, нека је задан број α као разломак $\dfrac{r}{s}$. Низ бројева $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, у изразу (1), називамо „верижним“ цифрама и одређујемо га корак по корак у процесу „уверижавања“ како следи. Тако нулту „верижну“ цифру a_0 одређујемо као целобројну вредност разломка α, тј. $a_0 = [\alpha]$. Сам број α сматрамо за нулту „карику“ у процесу „уверижавања“. Даље, у првом кораку одређујемо „карику“ $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_0}$ и одатле „верижну“ цифру $a_1 = [\alpha_1]$. Приметимо да прва по реду „карика“ α_1 представља разломак $\dfrac{s}{r - a_0 s}$ који означавамо са $\dfrac{r_1}{s_1}$. У другом кораку одређујемо „карику“ $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1}$ и одатле другу „верижну“ цифру $a_2 = [\alpha_2]$. Приметимо да друга по реду „карика“ α_2 представља разломак $\dfrac{s_1}{r_1 - a_1 s_1}$ који означавамо са $\dfrac{r_2}{s_2}$. Слично настављамо даље. У n-том кораку одређујемо „карику“ $\alpha_n = \dfrac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}}$ и одатле n-ту „верижну“ цифру $a_n = [\alpha_n]$. Приметимо да n-та по реду „карика“ α_n представља разломак $\dfrac{s_{n-1}}{r_{n-1} - a_{n-1} s_{n-1}}$ који означавамо са $\dfrac{r_n}{s_n}$.

Доказујемо да постоји индекс n којим се окончава процес „уверижавања“. Приметимо да за низ „карика“ $\dfrac{r}{s}, \dfrac{r_1}{s_1}, \dfrac{r_2}{s_2}, \dots, \dfrac{r_n}{s_n}$ важе неједнакости: $r_n + s_n < r_{n-1} + s_{n-1} < \dots < r_1 + s_1$. Заиста: $r_n + s_n = r_{n-1} + (1 - a_{n-1}) s_{n-1} < r_{n-1} + s_{n-1} < \dots < r_1 + s_1$. Дакле „исцрпљивањем“ претходних збирова, будући да се збир $r_n + s_n$ стално смањује, постоји индекс n за који се процес „уверижавања“ завршава. Тада је последња „карика“ природан број, иначе бисмо у супротном могли наставити процес „уверижавања“. У том случају полазни разломак α, помоћу бројева $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, представљен је у облику (1). Напоменимо да је уобичајено у литератури да се окончавање претходног поступка у коначном броју корака закључује према Еуклидовом алгоритму [1].

Ако број α није рационалан, тада низ бројева $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ није коначан. Бројиоци и имениоци p_n и q_n, верижних разломака $[a_0; a_1, \dots, a_n]$, одређују се из рекуретних релација:

$$
\begin{aligned}
p_n &= p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}, \\
q_n &= q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

уз почетне вредности $p_0 = a_0, q_0 = 1$ и $p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$. Формуле (2), на основу (1), можемо доказати индукцијом. За $n = 2$ по формулама (2) добијамо $p_2 = p_1 \cdot a_2 + p_0 = (a_0 a_1 + 1) \cdot a_2 + a_0$ и $q_2 = q_1 \cdot a_2 + q_0 = a_1 \cdot a_2 + 1$. Наведене вредности за именилац и бројилац се добијају и из (1):

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_2 \cdot a_1 + 1}$$

Претпоставимо да су формуле доказане за неки n. Посматрајмо за n и $n+1$ редом верижне разломке:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}}$$

и

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Приметимо да из разломка $\frac{p_n}{q_n}$ добијамо разломак $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ заменом завршне „карике“ a_n са „кариком“ $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$. Самим тим заменом у формулама (2) завршне „карике“ a_n са „кариком“ $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ добијамо разломак $\frac{p^{'}_{n+1}}{q^{'}_{n+1}}$ чијим редуковањем добијамо тражени разломак $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. На основу извршене замене добијамо:

$$p^{'}_{n+1} = p_{n-1}\big(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\big) + p_{n-2} = \frac{(p_{n-1}a_n + p_{n-2})a_{n+1} + p_{n-1}}{a_{n+1}} = \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{a_{n+1}}$$

и

$$q^{'}_{n+1} = q_{n-1}\big(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\big) + q_{n-2} = \frac{(q_{n-1}a_n + q_{n-2})a_{n+1} + q_{n-1}}{a_{n+1}} = \frac{q_n a_{n+1} + q_{n-1}}{a_{n+1}}.$$

Делећи $p^{'}_{n+1}$ и $q^{'}_{n+1}$ коефицијентом пропорционалности $\frac{1}{a_{n+1}}$ добијамо једнакости:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \cdot a_{n+1} + p_{n-1}, \\ q_{n+1} &= q_n \cdot a_{n+1} + q_{n-1}. \end{aligned}$$

Тиме су доказане формуле (2).

Доказаћемо да формуле (2) за свако n дају узајамно просте бројеве p_n и q_n. У ту сврху означимо разлику два узастопна разломка $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ са Δ_n.

Тада је $\Delta_n = \dfrac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_{n-1} \cdot q_n} = \dfrac{D_n}{q_{n-1} \cdot q_n}$, где $D_n = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$. Из формула (2) важи $D_n = -D_{n-1}$. Одатле добијамо једнакост $D_n = (-1)^{n-1} D_1 = (-1)^n$. Претпоставимо супротно да природни бројеви p_n и q_n имају за заједнички фактор природан број $\lambda > 1$. Тада заменом $p_n = \lambda p_n''$ и $q_n = \lambda q_n''$ у једнакост $D_n = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$ долазимо до немогуће једнакости у скупу целих бројева: $\lambda(p_n'' q_{n-1} - q_n'' p_{n-1}) = (-1)^n$. И тако, доказом свођењем на апсурд, поред формула (2), доказано је:

Својство 1. *Имениоци и бројиоци p_n и q_n $(n \in N)$ одређени формулама (2) јесу узајамно прости бројеви.*

У општем случају за ма који цео број a_0 и низ природних бројева $a_1, \dots, a_n, \dots$ формулама (2) одређен је низ разломака $\dfrac{p_0}{q_0}, \dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \dots, \dfrac{p_n}{q_n}, \dots$ које називамо *верижним апроксимацијама*. У даљем разматрамо особине верижних апроксимација ралних бројева.

За разлику два узастопна разломка $\Delta_n = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{D_n}{q_{n-1} \cdot q_n}$ на основу једнакости $D_n = (-1)^n$, важи једнакост:

(3)
$$\Delta_n = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} \cdot q_n}.$$

Сад, на основу (2) и (3) закључујемо:

Својство 2. *Низ именилаца $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ верижних апроксимација, јесте строго растући низ бројева. Апсолутне разлике између верижних апроксимација $\dfrac{p_n}{q_n}$ и $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, одређене са $|\Delta_n| = \left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \dfrac{1}{q_{n-1} \cdot q_n}$ монотоно теже ка* 0.

На основу једнакости (3) такође закључујемо да важи:

Својство 3. *Свака верижна апроксимација $\dfrac{p_n}{q_n}$ са непарним индексом n већа је од суседних верижних апроксимација $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ и $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Свака верижна апроксимација $\dfrac{p_n}{q_n}$ са парним индексом n мања је од суседних верижних апроксимација $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ и $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.*

На основу једнакости (3), према формулама (2), важи:

(4)
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n \cdot q_{n-2}}.$$

Заиста, како $p_{n-2} = p_n - p_{n-1} \cdot a_n$ и $q_{n-2} = q_n - q_{n-1} \cdot a_n$ то добијамо: $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_n - p_{n-1} \cdot a_n}{q_n - q_{n-1} \cdot a_n} = \dfrac{(p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1}) a_n}{q_n \cdot q_{n-2}} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n \cdot q_{n-2}}$. На основу једнакости (4) важи:

Својство 4. *Низ верижних апроксимација са парним индексима јесте низ монотоно растућих бројева, а низ верижних апроксимација са непарним индексима јесте низ монотоно опадајућих бројева.*

На основу својстава 2, 3 и 4 није тешко закључити да важи:

Својство 5. *Низ сегмената* $\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}\right]$, $\left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k}\right]$, $\ldots$ *јесте низ сегмената уређених инклузијом тако да сваки члан низа садржи све наредне чланове низа и да дужина низа сегмента* $|\Delta_k| = \dfrac{1}{q_{k-1} \cdot q_k}$ *монотоно тежи ка* 0.

Рационалне апроксимације I и II врсте

Нека је $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ низ верижних апроксимација реалног броја α који конвергира ка том броју. На основу досад разматраних својства приметимо да низ верижних апроксимација осцилује око вредности α тако да апсолутна грешка апроксимације $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$ јесте мања од апсолутне разлике између две узастопне апроксимације $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$. Одатле закључујемо:

Својство 6. *Апсолутна грешка при замени броја* α *са верижним разломком* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *мања је од* $\dfrac{1}{q_{n-1}^2}$, *тј. важи:*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}. \tag{5}$$

Даље, квалитет апроксимације реалног броја разломком дајемо дефиницијом, коју наводимо према Хинчину [1]. Рационалан број $\dfrac{p}{q}$ $(q > 0)$ јесте *најбоља рационална апроксимација реалног броја* α *прве врсте* ако важи неједнакост:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \tag{6}$$

за све разломке $\dfrac{r}{s} \neq \dfrac{p}{q}$ такве да је $0 < s \leqslant q$. Рационалан број $\dfrac{p}{q}$ $(q > 0)$ јесте *најбоља рационална апроксимација реалног броја* α *друге врсте* ако важи неједнакост:

$$|q\alpha - p| < |s\alpha - r| \tag{7}$$

за све разломке $\dfrac{r}{s} \neq \dfrac{p}{q}$ такве да је $0 < s \leqslant q$. Даље, према [1], наводимо својства најбољих рационалних апроксимација:

Својство 7. *Рационалан број јесте најбоља апроксимација друге врсте ако и само ако јесте верижна апроксимација за задан реалан број.*

Својство 8. *Најбоља рационална апроксимација друге врсте јесте и најбоља рационална апроксимација прве врсте. Обратно не мора да важи.*

На основу претходна два својства, додатно, важи својство: *За задан реалан број α коначне верижне апроксимације јесу најбоље рационалне апроксимације прве врсте. Обратно не мора да важи.* Наиме, постоје најбоље рационалне апроксимације прве врсте које нису добијене једноставним одсецањем верижног развоја. Оне се јављају између две верижне апроксимације. Наведено следи из низа примера који следе, при том су звездицом $*$ назначене верижне апроксимације.

Пример 1. Најбоље рационалне апроксимације прве врсте броја π јесу следећи разломци:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{3}{1}*, & \frac{13}{4}, & \frac{16}{5}, & \frac{19}{6}, & \frac{22}{7}*, \\
\frac{179}{57}, & \frac{201}{64}, & \frac{223}{71}, & \frac{245}{78}, & \frac{267}{85}, \\
\frac{289}{92}, & \frac{311}{99}, & \frac{333}{106}*, & \frac{355}{113}*, & \frac{52163}{16604}, \\
\frac{52518}{16717}, & \frac{52873}{16830}, & \dots, & \frac{103283}{32876}, & \frac{103638}{32989}, \\
\frac{103993}{33102}*, & \frac{104348}{33215}*, & \frac{208341}{66317}*, & \frac{312689}{99532}*, & \dots
\end{array}$$

Напоменимо да се међуверижне апроксимације прве врсте природно јављају у апроксимирању реалних бројева. Тако на пример, Архимед користећи правилне полигоне са 6, 12, 24, 48 и 96 страна уписане у круг или описане око круга нашао је процену броја π управо између међуверижне и верижне апроксимације у виду $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}*$.

Пример 2. Најбоље рационалне апроксимације броја прве врсте e јесу следећи разломци:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{3}{1}*, & \frac{5}{2}, & \frac{8}{3}*, & \frac{11}{4}*, & \frac{19}{7}*, & \frac{49}{18}, \\
\frac{68}{25}, & \frac{87}{32}*, & \frac{106}{39}*, & \frac{193}{71}*, & \frac{685}{252}, & \frac{878}{323}, \\
\frac{1071}{394}, & \frac{1264}{465}*, & \frac{1457}{536}*, & \frac{2721}{1001}*, & \frac{12341}{4540}, & \frac{15062}{5541}, \\
\frac{17783}{6542}, & \frac{20504}{7543}, & \frac{23225}{8544}*, & \frac{25946}{9545}*, & \frac{49171}{18089}*, & \dots
\end{array}$$

Природно се поставља питање како изгледају добијене међуверижне најбоље рационалне апроксимације прве врсте у одговарајућем верижном запису.

Пример 3. Одредити верижне записе разломака који јесу најбоље рационалне апроксимације прве врсте за број π.

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{1} &= [3]*, \\
\tfrac{13}{4} &= [3;\ \ 4], \\
\tfrac{16}{5} &= [3;\ \ 5],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{19}{6} &= [3;\ \ 6],\\
\tfrac{22}{7} &= [3;\ \ 7]*,\\
\tfrac{179}{57} &= [3;\ \ 7,\ \ 8],\\
\tfrac{201}{64} &= [3;\ \ 7,\ \ 9],\\
\tfrac{223}{71} &= [3;\ \ 7,\ \ 10],\\
\tfrac{245}{78} &= [3;\ \ 7,\ \ 11],\\
\tfrac{267}{85} &= [3;\ \ 7,\ \ 12],\\
\tfrac{289}{92} &= [3;\ \ 7,\ \ 13],\\
\tfrac{311}{99} &= [3;\ \ 7,\ \ 14],\\
\tfrac{333}{106} &= [3;\ \ 7,\ \ 15]*,\\
\tfrac{355}{113} &= [3;\ \ 7,\ \ 16]*,\\
\tfrac{52163}{16604} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}146],\\
\tfrac{52518}{16717} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}147],\\
&\ \ \vdots\\
\tfrac{103283}{32876} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}290],\\
\tfrac{103638}{32989} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}291],\\
\tfrac{103993}{33102} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}292]*,\\
\tfrac{104348}{33215} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}293]*,\\
\tfrac{208341}{66317} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}292,\ \ 2]*,\\
\tfrac{312689}{99532} &= [3;\ \ 7,\ \ 15,\ \ 1{,}292,\ \ 3]*,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Пример 4. Одредити верижне записе разломака који јесу најбоље рационалне апроксимације прве врсте за број e.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{3}{1} &= [3]*,\\
\tfrac{5}{2} &= [2;\ \ 2],\\
\tfrac{8}{3} &= [2;\ \ 1, 2]*\\
\tfrac{11}{4} &= [2;\ \ 1, 3]*\\
\tfrac{19}{7} &= [2;\ \ 1, 2,\ \ 2]*\\
\tfrac{49}{18} &= [2;\ \ 1, 2,\ \ 1,\ \ 1{,}2],\\
\tfrac{68}{25} &= [2;\ \ 1, 2,\ \ 1,\ \ 1{,}3],\\
\tfrac{87}{32} &= [2;\ \ 1, 2,\ \ 1,\ \ 1{,}4]*\\
\tfrac{106}{39} &= [2;\ \ 1, 2,\ \ 1,\ \ 1{,}5]*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{193}{71} &= [2;\ \ 1,2,\ 1,\ 1{,}4,\ 2]*,\\
\tfrac{685}{252} &= [2;\ \ 1,2,\ 1,\ 1{,}4,\ 1,\ \ 1{,}3]\\
\tfrac{878}{323} &= [2;\ \ 1,2,\ 1,\ 1{,}4,\ 1,\ \ 1{,}4]\\
\tfrac{1071}{394} &= [2;\ \ 1,2,\ 1,\ 1{,}4,\ 1,\ \ 1{,}5]\\
\tfrac{1204}{465} &= [2;\ \ 1,2,\ 1,\ 1{,}4,\ 1,\ \ 1{,}6]*\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Нека су за реалан број α одређене редом верижне апроксимације: $\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = [a_0; a_1,\ \ldots,\ a_{n-2}]$, $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$ и $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Низ разломака следећег облика $\dfrac{p_{n-2} + j \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + j \cdot q_{n-1}}$, за $j \in \{1, \ldots, a_n - 1\}$, одређује *међуверижни низ* за верижне разломке $\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ и $\dfrac{p_n}{q_n}$ [1]. Напоменимо да су верижна апроксимација $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и цео међуверижни низ за $\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ и $\dfrac{p_n}{q_n}$ са разних страна реалног броја α. У [1] доказано је да важи:

Својство 9. *Рационалан број је најбоља апроксимација прве врсте ако и само ако јесте верижна апроксимација или разломак из међуверижног низа за задан број* α.

Претходно наведено својство одређује скуп у коме се налазе све најбоље рационалне апроксимације прве врсте. У овом чланку истакнућемо неке правилности које се јављају за оне међуверижне апроксимације које су истовремено и најбоље рационалне апроксимације прве врсте. Нека су за реалан број α одређене верижне апроксимације $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$ и $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$. Поставља се следећи проблем: да ли постоји природан број $a'_n \in \{1, \ldots, a_n - 1\}$ такав да је разломак $\dfrac{p'_n}{q'_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n]$ најбоља рационална апроксимација прве врсте која припада међуверижном низу за задан реалан број α. Такве разломке називамо *међуверижним апроксимацијама прве врсте.* Најмањи такав број $a_n^{'}$, уколико постоји, називамо *међуверижна цифра* која претходи верижној цифри a_n и разломак $\dfrac{p'_n}{q'_n}$ који је тиме одређен називамо *прва међуверижна апроксимација прве врсте* реалног броја α.

Својство 10. *Нека су за реалан број* α *дате две узастопне верижне апроксимације* $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$ *и* $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$. *Ако постоји прва међуверижна апроксимација прве врсте* $\dfrac{p'_n}{q'_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n]$, *са међуверижном цифром* $0 < a'_n < a_n$, *тада су сви разломци* $\dfrac{p''_n}{q''_n} =$

$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a''_n]$ *редом за* $a'_n < a''_n < a_n$ *све боље међуверижне апроксимације прве врсте заданог реалног броја* α.

Доказ. Нека постоји прва међуверижна апроксимација прве врсте. Докажујемо да се следећа боља међуверижна апроксимација прве врсте, ако постоји, добија за $a''_n = a'_n + 1 < a_n$. Прва међуверижна апроксимација $\dfrac{p'_n}{q'_n}$ прве врсте је са различите стране реалног броја α у односу на верижни разломак $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, нпр. нека је $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \alpha < \dfrac{p'_n}{q'_n}$. Даље, према својству 9, постоји природан број j' тако да: $\dfrac{p'_n}{q'_n} = \dfrac{p_{n-2} + j' \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + j' \cdot q_{n-1}}$. Одредимо: $p''_n = p_{n-1} \cdot a''_n + p_{n-2} = p_{n-1} \cdot (a'_n + 1) + p_{n-2} = p'_n + p_{n-1}$ и $q''_n = q_{n-1} \cdot a''_n + q_{n-2} = q_{n-1} \cdot (a'_n + 1) + q_{n-2} = q'_n + q_{n-1}$. Самим тим разломак $\dfrac{p''_n}{q''_n} = \dfrac{p'_n + p_{n-1}}{q'_n + q_{n-1}} = \dfrac{p_{n-2} + (j'+1) \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + (j'+1) \cdot q_{n-1}}$, припада међуверижном низу у коме се налазе могуће међуверижне апроксимације прве врсте. Одатле закључујемо да је разломак $\dfrac{p''_n}{q''_n}$ са исте стране броја α као и $\dfrac{p'_n}{q'_n}$, тј. да важи: $\dfrac{p''_n}{q''_n} - \alpha > 0$. На основу претходног разматрања закључујемо:

$$0 < \frac{p''_n}{q''_n} - \alpha = \frac{p'_n + p_{n-1}}{q'_n + q_{n-1}} - \alpha = \frac{p'_n}{q'_n} - \alpha + \frac{q'_n p_{n-1} - q_{n-1} p'_n}{{q'_n}^2 + q'_n q_{n-1}} < \frac{p'_n}{q'_n} - \alpha,$$

јер је $q'_n p_{n-1} - q_{n-1} p'_n < 0$. Дакле, разломак $\dfrac{p''_n}{q''_n}$ из међуверижног низа јесте боља апроксимација од разломка $\dfrac{p'_n}{q'_n}$ што је и требало доказати. ■

У вези са претходним разматрањем поставља се следећи општи проблем: *Одредити за дати реални број* α *под којим условима постоје и по ком правилу се формирају прве међуверижне апроксимација прве врсте*? Посебно, доказати или оповргнути да за број $\beta = \dfrac{e-1}{2}$ важи правило $a'_n = \dfrac{1}{2} a_n$ $(n \geqslant 2)$ [5].

Рачунарско одређивање рационалних апроксимација I врсте

У разним практичним применама реалан број се увек апроксимира неким разломком. Природно се јавља потреба да је разломак најбоља рационална апроксимација прве врсте. У неким случајевима, ако су верижне апроксимације међусобно доста удаљене, јавља се потреба за међуверижним апроксимацијама прве врсте, као једнако добрим апроксимацијама. У ту сврху написали смо UBASIC[1] програм за одређивање најбољих рационалних апроксимација прве врсте за задан реалан број са великим бројем цифара.

[1] једна врста BASIC-а која омогућава рад са великим бројем цифара

```
10   rem verige
20   print " najbolje racionalne aproksimacije realnog broja"
30   '
40   cls:point 210:input "x=";X
50   print "broj verižnih razlomaka";: input "k=";K: if (K>100) goto 50
60   dim C(K),P(K),Q(K)
70   Ind=-1:Eps=10^-100
80   Z=X:C(0)=int(X): if (Z=C(0)) then Z=Z+Eps
90   clr time
100   for I=1 to K
110     if (Z=C(I-1)) then Z=Z+Eps
120     Z=1/(Z-C(I-1)):C(I)=int(Z)
130   next I
140   P(0)=C(0):P(1)=C(0)*C(1)+1:Q(0)=1:Q(1)=C(1)
150   for I=2 to K
160     P(I)=C(I)*P(I-1)+P(I-2)
170     Q(I)=C(I)*Q(I-1)+Q(I-2)
180   next I
190   cls:print "verižne racionalne aproksimacije broja x:": print
200   for I=0 to K: print P(I);"/";Q(I);:next I:print:print
210   print "najbolje racionalne aproksimacije broja x:": print
220   for I=1 to K
230     M=C(I)
240     A1=P(I-1):A0=1:if (I>1) then A0=P(I-2)
250     B1=Q(I-1):B0=0:if (I>1) then B0=Q(I-2)
260     D1=abs(X-A1/B1)
270     gosub *Stampa2(A1,B1)
280     for J=1 to (M-1)
290       A2=A0+J*A1
300       B2=B0+J*B1
310       D2=abs(X - A2/B2)
320       if (D1<D2) goto 350
330       D1=D2: gosub *Stampa1(A2,B2)
340       rem cancel for:goto 360
350     next J
360   next I
370   print time:end
380   '
390   *Stampa1(A,B)
400    print "r=";using(15,0),A;:print "/"; using(15,0),B;
410    print "d=";using(1,20),(A /B - X); "...μ":print "..."
420   return
430   *Stampa2(A,B)
440    Ind=Ind+1:print "r=";using(15,0),A;: print "/";using(15,0),B;
450    print "d=";using(1,20),(A /B - X);: print "...*";Ind
460   return
```

Програм даје верижне апроксимације $(*)$ и међуверижне апроксимације (μ) децималски унетог броја α, као и одговарајућу апсолутну грешку од унетог броја α. Наредба `point` 210 у линији 50 обезбеђује да цео програм ради са 1011 цифара у непокретном зарезу. Наведена тачност се показала као задовољавајућа за тачно одређивање до 100 верижних апроксимација, као и одговарајућег броја њима одређених најбољих међуверижних апроксимација прве врсте. Сам програм се лако преноси и на друге програмске језике и математичке програмске алатке[2] који подржавају рад са великим бројем цифара.

Примене рационалних апроксимација I врсте

Проблем календара. Астрономским мерењима може се установити да период окретања земље око сунца износи 365 *дана* 5 *часова* 48 *минута* 46 *секунди*. Нас интересује како је могуће бирати календар да би се после извесног периода увеле преступне године којима се надокнађује вишак од $5^h 48' 46'' = 20926''$. Будући да дан износи $24^h = 86400''$, тада посматрајмо најбоље рационалне апроксимације прве врсте количника $\delta = 20926/86400$:

$$\frac{1}{4}*,\ \frac{4}{17},\ \frac{5}{21},\ \frac{6}{25},\frac{7}{29}*,\ \frac{8}{33}*,\ \frac{23}{95},\ \frac{31}{128}*,\frac{101}{417},\ \frac{132}{545},\ \frac{163}{673}*,\ \frac{5247}{21664},\dots .$$

Наведени низ је коначан будући да смо се ограничили на секунду као јединицу протеклог времена. Календар у коме је, без корекције, свака четврта година реступтна назива се стари или *јулијански календар*. Савремени или *грегоријански календар* одговара јулијанском календару са корекцијом везаном за године почетака столећа, које су све преступне у јулијанском календару. Корекција се састоји у проглашавању столећа за преступно ако је укупан број протеклих столећа дељив са четири. Тако година 1900 није преступна, а година 2000 јесте преступна. На тај начин број δ апроксимира са разломком 97/400, апсолутна грешка апроксимације износи $\left|\delta - \dfrac{97}{400}\right| \cong 3.01 \cdot 10^{-4}$. На основу чињенице да из пропорције $\dfrac{31}{128} = \dfrac{x}{400}$ следи апроксимација $x = 96.875 \cong 97$, закључујемо да грегоријански календар приближно одговара јулијанском календару у коме се сваких 128 година губи једна преступна година. Тако одређен календар 1864 године предложио је руски астроном Медлер [4, 12.44]. Апсолутна грешка апроксимације Медлеровог календара износи $\left|\delta - \dfrac{31}{128}\right| \cong 1.16 \cdot 10^{-5}$. Напоменимо да наведени низ верижних и међуверижних апроксимација прецизира, у смислу најбољих рационалних апроксимација прве врсте, који су све календари могући. Тако на пример, јулијански календар у коме се у сваких 417 година реализује 101 преступна година, јесте прецизнији календар од грегоријанског, са апсолутном грешком апроксимације $\left|\delta - \dfrac{101}{417}\right| \cong 7.16 \cdot 10^{-6}$.

Проблем музичке скале. Још један интересантан пример коришћења најбољих рационалних апроксимација прве врсте састоји се у објашњењу зашто

[2] попут `MATHLAB` и `MATHEMATICA` пакета

се од времена Bach-а у музици користи равномерно темперована октална скала од 12 полутонова у свакој октави. Наиме, ако је дужина жице l таква да даје звук са $\omega = 512$ осцилација у секунди тада краћа жица дужине $\frac{2}{3} \cdot l$ има учесталост од $\frac{3}{2} \cdot \omega$ којом одређујемо крај скале. Апсолутни слух мери размеру добијених тонова логаритмом за основу 2 количника тих учесталости $\frac{3}{2} \cdot \omega$ и ω. На тај начин, бројем $\nu = \log_2 \left(\frac{3}{2} \cdot \omega : \omega \right) = \log_2 3 - 1$ меримо односе тонова у једној равномерно темперованој скали [3, Пример 46]. Одатле, као и у проблему календара, размотримо најбоље рационалне апроксимације прве врсте константе апсолутног слуха $\nu = \log_2 3 - 1$:

$$\frac{1}{1}*,\ \frac{1}{2}*,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5}*, \frac{4}{7},\ \frac{7}{12}*,\ \frac{17}{29},\ \frac{24}{41}*, \ldots$$

Наведени низ је бесконачан, али због техничке изводљивости задржимо се на првих неколико најбољих рационалних апроксимација прве врсте. Пре Bach-а у музици апсолутна скала се делила на различите начине. Неки народи истока имали су петотоничку скалу. Са Bach-овом серијом од 24 прелудијума и фуга под називом „*Добро темперован клавир*“ у савременој музици почиње да се користи равномерно темперована скала од 12 полутонова у свакој октави. Апсолутна грешка апроксимације износи $\left| \nu - \frac{7}{12} \right| \cong 1.63 \cdot 10^{-3}$. За формирање још савршенијег клавира неопходно је увести 29 полутонова уместо 12 полутонова, при том апсолутна грешка апроксимације износи $\left| \nu - \frac{17}{29} \right| \cong 1.24 \cdot 10^{-3}$. На тај начин се још више приближавамо константи апсолутног слуха. Наведени низ верижних и међуверижних апроксимација прецизира, у смислу најбољих рационалних апроксимација прве врсте, какви су све клавири могући.

На крају чланка желим да искажем захвалност професору Славиши Прешићу на корисним сугестијама приликом писања овог чланка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин: *Цепные дробы*, Москва 1978.

[2] С. Б. Прешић: *Реални бројеви*, Београд 1985.

[3] Ф. Клајн: *Елементарная математика*, т. I, Москва 1987.

[4] Н. М. Бескин: *Замечательные дробы*, Минск 1980.

[5] B. J. Malešević: *Problem* 1.97, Problem section, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Beograd, Ser. Mat. **8** (1997), 120–121.