НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Предраг Радиновић

ЈОШ ЈЕДАН НАЧИН ТРИСЕКЦИЈЕ УГЛА ХИПЕРБОЛОМ

Вековима су математичари покушавали да реше проблем трисекције угла. Међутим, Гаус (C. F. Gauss, 1777–1855) је доказао да се тај проблем не може решити елементарним конструкцијама (помоћу шестара и лењира).

Наиме, пође ли се од разлагања $\sin 3\varphi = \sin(2\varphi+\varphi)$, долази се до једнакости

$$\sin^3\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi = 0 \tag{1}$$

и показује се да се њена лева страна не може раставити на факторе $(\sin\varphi - x_1)(\sin\varphi - x_2)(\sin\varphi - x_3)$ где би бар један од корена био број који је мера дужи која се може конструисати елементарним конструкцијама.

У тој ситуацији математичари су покушавали да прибегну неким другим методама. Мађарском математичару Бољаиу (Bolyai János, 1802–1860) пошло је за руком да проблем реши помоћу хиперболе, о чему је у броју XLI, 3–4 овог часописа писао Здравко Старц. У овом раду даје се још једна метода деобе угла на три једнака дела применом хиперболе.

Сл. 1

Уочимо тачке A, B и C у координатном систему xOy као на слици 1, $A(1,0)$, $B(-1,0)$. Нека је $\angle BCA = \alpha$. Уочимо тачку $M(x,y)$ лука $\overset{\frown}{BA}$ у првом квадранту, при чему је $\overset{\frown}{MA}$ трећина лука $\overset{\frown}{BA}$. Тада је $\angle ACM = \alpha/3$. Јасно је да је $\angle OCA = \alpha/2$, па је $\angle OAC = 90^\circ - \alpha/2$. Како је $\angle MAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha/3)$, то је и $\angle OAM = \angle MAC - \angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha/3) - (90^\circ - \alpha/2) = \alpha/3$.

Одредимо координате тачке $M(x,y)$. Из $\triangle CAO$ је $CA = \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $OC = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Како је

$$\begin{aligned} MA^2 &= CA^2 + CM^2 - 2CA\cdot CM\cos\frac{\alpha}{3} \\ &= \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{3} \\ &= \frac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(1-\cos\frac{\alpha}{3}\right), \end{aligned}$$

то је $MA = \dfrac{\sqrt{2(1-\cos\frac{\alpha}{3})}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Даље, из $\triangle ANM$ је $NA = MA\cos\frac{\alpha}{3}$, тј. $NA = \dfrac{\sqrt{2(1-\cos\frac{\alpha}{3})}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\dfrac{\alpha}{3}$. Како је $x = 1 - NA$, то следи

$$x = 1 - \frac{\sqrt{2(1-\cos\frac{\alpha}{3})}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{3}. \tag{2}$$

Такође, из $\triangle ANM$ је $MN = MA\sin\frac{\alpha}{3}$, односно

$$y = \frac{\sqrt{2(1-\cos\frac{\alpha}{3})}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{3}. \tag{3}$$

Показаћемо да тачка $M(x,y)$ припада хиперболи

$$\frac{(x+1/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1, \tag{4}$$

односно

$$3x^2 - y^2 + 2x - 1 = 0. \tag{5}$$

Нека је $\alpha/3 = 2\varphi$, тј. $\alpha/2 = 3\varphi$. Тада из (2) и (3) добијамо

$$x = 1 - \frac{2\sin\varphi\cos 2\varphi}{\sin 3\varphi}, \quad y = \frac{2\sin\varphi\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi}. \tag{6}$$

Упростимо ли x из (6) имаћемо

$$x = \frac{\sin 3\varphi - 2\sin\varphi\cos 2\varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi}. \tag{7}$$

Дељењем y са x имамо $\dfrac{y}{x} = 2\sin 2\varphi$, односно $\sin 2\varphi = \dfrac{y}{2x}$. Даље, из (6) имамо

$$\frac{2\sin\varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{1-x}{\cos 2\varphi}, \qquad \frac{2\sin\varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{y}{\sin 2\varphi},$$

одакле следи $\dfrac{1-x}{\cos 2\varphi}=\dfrac{y}{\sin 2\varphi}$, односно

$$\frac{(1-x)^2}{1-\sin^2 2\varphi}=\frac{y^2}{\sin^2 2\varphi}. \tag{8}$$

Заменимо ли $\sin 2\varphi=\dfrac{y}{2x}$ у релацију (8) имамо $\dfrac{(1-x)^2}{1-(y/2x)^2}=\dfrac{y^2}{(y/2x)^2}$, што после срећивања даје тражену једначину хиперболе (5), односно (4).

Покажимо сада, обратно, да хипербола (5) на луку $\overset{\frown}{AB}$ кружнице k одређује тачку $M(x,y)$, такву да је лук $\overset{\frown}{AM}$ трећина лука $\overset{\frown}{AB}$.

Са слике 1 се види да је једначина кружнице k: $x^2+(y-OC^2)=CA^2$. Како је $CA=\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $OC=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, то је

$$x^2+\left(y-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

односно

$$x^2+\left(y-\frac{1}{\operatorname{tg}3\varphi}\right)^2=\frac{1}{\sin^2 3\varphi}, \tag{9}$$

где је $\alpha/2=3\varphi$. Хипербола (5) је $3x^2-y^2+2x-1=0$. Решавање система једначина (5) и (9) се своди на решавање једначине четвртог степена са сложеним коефицијентима.

Да бисмо избегли компликовано решавање поменуте једначине четвртог степена, поступимо на следећи начин. Напишимо релацију (9) у облику

$$x^2+y^2-\frac{2}{\operatorname{tg}3\varphi}\,y+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 3\varphi}=\frac{1}{\sin^2 3\varphi},$$

а из (5) заменимо $y=\pm\sqrt{3x^2+2x-1}$. Добија се

$$x^2+(3x^2+2x-1)\pm\frac{2}{\operatorname{tg}3\varphi}\sqrt{3x^2+2x-1}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 3\varphi}=\frac{1}{\sin^2 3\varphi},$$

осносно срећивањем

$$4x^2+2x-1\pm\frac{2}{\operatorname{tg}3\varphi}\sqrt{3x^2+2x-1}=1.$$

Уврстимо ли овде из (7) координату тачке M, $x=\dfrac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi}$, добијамо

$$\left(\frac{2\sin^2\varphi}{\sin^2 3\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi}-1\right)^2=\frac{1-\sin^2 3\varphi}{\sin^2 3\varphi}\left(\frac{3\sin^2\varphi}{\sin^2 3\varphi}+\frac{2\sin\varphi}{\sin 3\varphi}-1\right).$$

Сређивањем ове једнакости добија се

$$4\sin^4\varphi + 4\sin^3\varphi\sin 3\varphi - 3\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\sin 3\varphi + \sin^2 3\varphi = 0,$$

односно $(4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi + \sin 3\varphi)(\sin\varphi + \sin 3\varphi) = 0$, тј.

$$4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi + \sin 3\varphi = 0,$$

што је на други начина записана једнакост (1). Дакле, тачка $M(x, y)$ за коју је лук $\overset{\frown}{AM}$ трећина лука $\overset{\frown}{AB}$ је пресечна тачка хиперболе (5) и кружнице лука $\overset{\frown}{AB}$.

Захваљујем се проф. др С. Прешићу на корисним сугестијама у обликовању овог рада.

ОБАВЕШТЕЊЕ

СВЕТСКИ КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА

Берлин, 18–27. август 1998.

У Берлину је одржан Интернационални конгрес математичара '98 (ICM '98), уз присуство око 4000 математичара из целог света. Скуп је организовала Интернационална математичка унија која је претходно, 15. и 16. августа, у Дрездену одржала састанак своје Генералне скупштине, а непосредни организатор је било Немачко математичко друштво.

Најзанимљивији догађај на отварању Конгреса је био додељивање Филдсових медаља, најцењенијег математичког признања које се додељује сваке четврте године. Овај пут лауреати су били: Richard E. Borcherds (Cambridge), за доприносе алгебри, W. Timothy Gowers (Cambridge), за доприносе функционалној анализи и комбинаторици, Maxim Kontsevich (IHES, Bures-sur-Yvette), за доприносе математичкој физици, алгебарској геометрији и топологији и Curtis T. MacMullen (Harvard), за доприносе комплексној динамици и хиперболичкој геометрији. Поред тога, додељена је Неванлинина награда за допринос рачунарским наукама, а добио ју је Peter W. Shor (AT&T Labs, New Jersey). Најзад, специјалну награду добио је Andrew J. Wiles (Princeton) за решење Фермаовог проблема (он није могао да добије Филдсову медаљу због ограничења да је могу добити математичари који немају више од 40 година).

На поменутој Генералној скупштини IMU изабран је нови председник Уније — то је Jacob Palis (Rio de Janeiro) и одлучено је да се наредни Светски конгрес математичара одржи у Пекингу 2002. године.