Здравко Ф. Старц

ЈЕДНА ТРИГОНОМЕТРИЈСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Применом косинусне и синусне теореме доказаћемо једну тригонометријску једнакост и затим ћемо навести њену примену.

Полазећи од косинусне теореме за елементе троугла ABC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

применом синусне теореме $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, добијамо једнакост

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Одавде непосредно изводимо закључак да ако је $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, тада вреди

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin^2\gamma. \tag{1}$$

Међутим, једнакост (1) вреди и под слабијим условима. Наиме, доказаћемо да ако је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, тада вреди (1). Имамо

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
&\qquad = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
&\qquad = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]\cos\gamma \\
&\qquad = 1 - \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + [\cos(\pi-\gamma) - \cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma \\
&\qquad = 1 - \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\pi-\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma \\
&\qquad = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma.
\end{aligned}$$

У следећим примерима показаћемо примену трансформације (1).

Пример 1. Израчунати вредност израза

$$I = \sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 10^\circ \sin^2 50^\circ.$$

Решење. Имамо

$$I = \sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ - 2\sin^2 10^\circ \sin^2 50^\circ \cos 120^\circ = \sin^2 120^\circ = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Израчунати вредност израза

$$I = \sin^2 15^\circ + \cos^2 60^\circ + 2\cos 75^\circ \sin 30^\circ.$$

Решење. Имамо $I = \sin^2 15^\circ + \cos^2 60^\circ + 3\sin 15^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 15^\circ + \sin^2 30^\circ - 2\sin 15^\circ \sin 30^\circ \cos 135^\circ = \sin^2 135^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Пример 3. Одредити $I = \cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

Решење. Имамо

$$I = \sin^2(\pi/2-\alpha) + \sin^2(\pi/2+\alpha+\beta) - 2\sin(\pi/2-\alpha)\sin(\pi/2+\alpha+\beta)\cos(-\beta),$$

и како је $(\pi/2-\alpha) + (\pi/2+\alpha+\beta) + (-\beta) = \pi$, то је $I = \sin^2\beta$.

Пример 4. Одредити

$$I = \cos^2 2\alpha + \cos^2(\alpha-\beta+\gamma) - 2\cos 2\alpha\cos(\alpha-\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma).$$

Решење. Имамо

$$\begin{aligned}
I &= \cos^2 2\alpha + \cos^2(-\alpha+\beta-\gamma) - 2\cos 2\alpha\cos(-\alpha+\beta-\gamma)\cos(-\alpha-\beta+\gamma)\\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta-\gamma\right) -\\
&\qquad - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta-\gamma\right)\cos(-\alpha-\beta+\gamma)\\
&= \sin^2(-\alpha-\beta+\gamma) = \sin^2(\alpha+\beta-\gamma),
\end{aligned}$$

јер је $(\pi/2+2\alpha) + (\pi/2-\alpha+\beta-\gamma) + (-\alpha-\beta+\gamma) = \pi$.

Пример 5. Доказати да је

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

ако је $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Решење. Имамо

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =\\
&\quad = \sin^2(\pi/2+\alpha) + \sin^2(\beta-\pi/2) - 2\sin(\pi/2+\alpha)\sin(\beta-\pi/2)\cos\gamma = \sin^2\gamma,
\end{aligned}$$

јер је $(\pi/2+\alpha) + (\beta-\pi/2) + \gamma = \pi$.