Слободанка Кечкић

НЕКОЛИКО МЕТОДИЧКИХ ИДЕЈА ЗА НАСТАВНИКЕ ВИШИХ РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Пре неколико година извршено је тестирање ученика основних школа у Београду и још неким местима Србије да би се утврдило знање домаће деце и деце која су тада у већем броју пристизала из ратом захваћених подручја бивше Југославије. Том приликом прикупљен је богат материјал који је коришћен за израду овог чланка. Наиме, на основу увида у то какве проблеме имају ученици у савлађивању планираног градива, па и наставници приликом преношења тог градива и покушаја да ученике што више заинтересују за математику написан је овај чланак који садржи најпре општа методичка упутства, а затим детаљнија упутства кроз по једну наставну тему за V, VI, VII и VIII разред.

Методичка упутства

Геометрија

Геометрија је у тестовима била заступљена у V разреду са пет задатака, у VI разреду са четири задатка, у VII разреду са шест задатака и у VIII разреду са осам задатака. Захтеви су били различити: заврши започету реченицу, нацртај то и то, нађи обим, површину и израчунај запремину, зависно од узраста ученика и наставних програма.

На основу резултата теста око 45% ученика није ни покушало да решава геометријске задатке, а свега 21% их је успешно решило. Ови подаци наводе на закључак да ученици нису у довољној мери савладали градиво из геометрије. Нека општа упутства како геометрију приближити ученицима могла би бити:

- у почетку радити сасвим једноставне задатке,
- обавезно цртати слику (поставити одговарајући модел),
- елементе слике (модела) повезивати са текстом задатка,
- користити одговарајућу математичку терминологију,
- слику (скицу модела) обележити,
- на слици (моделу) „открити“ поменути геометријски појам,
- уочити на слици (моделу) дате елементе,
- уочити на слици (моделу) тражене елементе,
- наћи везу између датих и тражених елемената уз образложење (позивање на одговарајућу дефиницију, теорему),

- приступити рачунском делу задатка,
- написати одговор на постављени захтев у задатку.

Са задацима из геометрије треба ићи веома постуно, од сасвим једноставних ка сложенијима. При томе, сваки пут уз низ вођених питања, *испочетка* уочавати везе између одговарајућих геометријских величина, све време пратећи и показујући их на одговарајућој слици (моделу). Све формуле које се користе у току једног часа исписивати у једном углу табле, тако да су стално „на оку“ ученицима. У току рада, када се одлучује која ће се формула користити у решавању задатка, указивати ученицима на начин размишљања. На пример, нека је реч о правоугаонику:

Такође, у геометрији су задаци углавном текстуални и ученик мора да учи како текст да „преведе“ на математичко-формулски језик. Поред тога, геометријски задаци се увек у нечему разликују, па се ученицима чини да не могу да искористе искуства из претходних задатака. „Ланцем“ асоцијација наставник треба да их наведе како могу своје знање и искуство да користе.

Алгебра

Алгебра је била заступљена скоро у свим задацима ових тестова јер се њене методе користе и у геометрији. У свим задацима се радило о бројевима: требало је препознати врсте бројева, приказати их на бројевној правој, сабирати их, одузимати, множити, делити, квадрирати их, кореновати и степеновати. То је била суштина, а форма захтева је била: „напиши … “ где је требало из неког скупа бројева издвојити оне бројеве који задовољавају један или два критеријума; „израчунај … “ где је у постављеном задатку требало обавити назначене операције; попуни таблицу; реши једначину или неједначину.

Ученици су најбоље резултате постигли у попуњавању таблица а најслабије у решавању једначина и неједначина. За разлику од геометрије, алгебарски задаци су више типизирани и када су већ и постављени, ученици који имају добру технику рачунања са успехом их решавају. У циљу побољшања знања ученика, требало би инсистирати да ученици:

- разликују по издвојеним својствима скупове бројева **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**, и како се међусобно ти скупови односе;
- науче да сваки број „виде“ на бројевној правој (не да га и нацртају), јер тако стичу појам о њиховој величини;
- увежбају технику рачунања, при чему не треба рачунати са великим бројевима (губи се време и суштина);
- поштују редослед рачунских операција уколико у задатку треба обавити више рачунских радњи;
- науче да задатак сагледају у целини, али да по потреби умеју да уоче његове делове такве да срeђивањем део по део задатак у целини и реше.

На крају, боље је увек урадити већи број једноставнијих задатака и инсистирати на разумевању појмова и поступка решавања.

У даљем тексту дато је неколико конкретних идеја како може да се реализује настава и омогући ученицима да науче пропуштено или не баш сасвим добро савладано градиво. С обзиром да су одељења велика, програми претрпани, а за учење математике је неопходна добра концентрација, било би добро да се такво учење организује у што мањим групама (можда и ван редовне наставе).

Узрасни ниво: V разред
Наставна тема: Скупови
Циљеви: Усвајање и утврђивање појмова скуп, елемент скупа, подскуп. Формирање и графичко приказивање скупова, њихових подскупова, уније, пресека и разлике скупова
Средства: Оловке у боји, фланелограф, пинг-понг лоптица, чичак-трака, врпце у боји
Реализација: Обрада наставне теме је планирана да траје један школски час са групом од 15 до 20 ученика после редовне наставе.

Уводни део часа. Обновити графичко приказивање скупа Веновим дијаграмом помоћу два-три примера. Рецимо: формирај и прикажи скуп свих једноцифрених бројева, или прикажи скуп слова свог имена Веновим дијаграмом.

Централни део часа предвиђа да наставник само контролише и усмерава док су ученици они који раде на табли и у свескама. Мото активности је „прикажи шта знаш“. Наставник треба да изведе два ученика пред таблу, а затим трећег. Улоге су следеће:

Први ученик	*Други ученик*	*Трећи ученик*
1. даје име скупу	пише:	одговара на питања дру-
2. црта Венов дијаграм		гих ученика и пише:
3. одређује елементе скупа, нпр.	$A = \{a, b, c, d, e, f\}$	
		$a \in A,\ b \in A,\ s \notin A$
	чиме показује да уме да	$B = \{d, f\} \subset A,\ \ldots$
	користи ознаку за скуп,	
	скуповну заграду, ознаке	(чиме показује да зна да
	елемената и знак једнакости	користи ознаке $\in$, $\notin$, $\subset$)

У току рада наставник са целом групом обнавља појмове: јесте елемент скупа, није елемент скупа, подскуп неког скупа. По потреби изводити више пута по три ученика све док већина (сви) ученици не усвоје поменуте појмове.

На сличан начин, уз активно учешће свих ученика редом илустративно уводити појмове празног скупа, уније, пресека и разлике два и три скупа.

Пример. Нацртајте у својим свескама Венов дијаграм за три скупа A, B и C.

Обојите пресек скупова A и B црвено.

Обојите разлику скупова C и B плаво.

Шрафирајте унију скупова A и C.

За време док ученици раде овакав пример наставник их обилази и прати њихов рад, помаже и исправља где је потребно. Поједине интересантне изборе међусобних положаја скупова A, B и C коментарисати на табли. Овакав рад са ученицима треба да делује подстицајно, јер је свако самосталан у својој активности (није само неми посматрач онога што се дешава на табли).

Варијација 1. Активност за последњих 10 минута редовног часа:

- поделити одељење у две екипе,
- поделити таблу на два једнака дела,
- по два представника сваке екипе су пред таблом,
- свака екипа задаје три речи противничкој екипи,
- представници на табли треба да формирају три скупа слова за три задате речи и да их прикажу Веновим дијаграмом,
- побеђује она екипа чији представници први заврше задатак.

Пример.	Први ученик из друге	Други ученик из друге екипе црта:
Прва екипа задаје:	екипе формира скупове:	
1. реч: $LOPTA$		
2. реч: $SLADOLED$	$S_1 = \{L, O, P, T, A\}$	
3. реч: $LUTKA$	$S_2 = \{S, L, A, D, O, E\}$	
	$S_3 = \{L, U, T, K, A\}$	

Ако има времена могу се поставити и додатни захтеви.

Напомена. Ово би уједно био и начин провере знања ученика.

Варијација 2. Ово је игра која се може изводити на часовима слободних активности или у „школи у природи“:

- на фланелографу врпцама у боји оивичити три скупа,
- у оивичене скупове закачити папириће са бројевима,

- припремити пинг-понг лоптицу на коју је залепљена чичак-трака,
- ученик лоптицом гађа број и биће му убележен као освојен бод само уколико уме да наведе скуп и један подскуп коме тај број припада,
- број бацања и величина скупова и њихових елемената зависи од броја учесника у игри.

Начин праћења. Усвајање обрађиваних појмова може се пратити кроз поменуте активности (игре), у току обраде новог градива, усменим пропитивањем, писменим проверама различите дужине трајања.

Узрасни ниво:	VI разред
Наставна тема:	Решавање једначина
Циљеви:	Да се ученици оспособе да решавају једноставније једначине; да их самостално постављају у текстуалним задацима; да решавају проблеме који се своде на решавање једначина; да умеју да их примене.
Средства:	Формуле исписане на постеру
Реализација:	Ова наставна тема је планирана да траје један школски час са групом од 15–20 ученика ван редовне наставе.

Уводни део часа. Обновити следеће:

$(*)$ Збир супротних бројева или израза је нула	$(*)$ $B + (-B) = B - B = 0$
(∇) Обема странама једнакости може да се дода исти број или израз	(∇) Ако је $A = C$, онда је $A + B = C + B$
$(\circ)$ Обе стране једнакости могу да се поделе (помноже) истим бројем или изразом различитим од нуле	$(\circ)$ Ако је $A = C$ и $B \neq 0$, онда је $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{B}$
$(\oplus)$ Решење једначине је сваки број који заменом своди једначину на тачну једнакост	

Наведене формуле могу се поставити на фланелографу или се могу исписати у горњем десном углу табле. Битно је да се изговарају и показују кад год се користе.

Централни део часа. Сада се може прећи на решавање једначина. Наставник треба да припреми више конкретних примера, према предложеним типовима једначина. Први пример сваког типа наставник треба да уради са детаљним образложењем, а остале нека решавају ученици.

Први тип једначина: $x + b = a$ (a, b одређени цели бројеви)

Кораци у решавању:
1. $x + b - b = a - b$ (користимо (∇))
2. $x = a - b$ (користимо $(*)$ и израчунавамо $a - b$)
3. решење је број $a - b$
4. проверавамо решење у полазној једначини.

Оваквих примера и примера који се сређивањем своде на овај тип треба урадити онолико колико је потребно да сви ученици у групи науче да решавају једначине овог типа.

Други тип једначина: $a \cdot x = c$ (a, c одређени цели бројеви; $a \neq 0$)

Кораци у решавању: 1. $\dfrac{ax}{a} = \dfrac{c}{a}$ (користимо ($\circ$))

2. $x = \dfrac{c}{a}$ (обављамо дељење и израчунавамо $\dfrac{c}{a}$)

3. решење је број $\dfrac{c}{a}$

4. проверавамо добијено решење у полазној једначини.

Као и у претходном случају, треба урадити онолико примера колико је потребно да већина (сви) ученици схвати и научи поступак решавања овог типа једначина. Тада се може прећи на следећи тип.

Трећи тип једначина: $a \cdot x + c = b \cdot x$ (a, b, c дати цели бројеви; $a \neq b$)

Кораци у решавању: 1. $ax + c - c = bx - c$ (користимо (∇))

2. $ax = bx - c$ (користимо ($*$))

3. $ax - bx = bx - bx - c$ (користимо (∇))

4. $ax - bx = -c$ (користимо ($*$))

5. $x(a - b) = -c$ (вршимо груписање и израчунавамо $a - b$)

6. $x = \dfrac{-c}{a - b}$ (користимо ($\circ$))

7. решење је број $\dfrac{-c}{a - b}$

8. проверавамо добијено решење у полазној једначини.

Напомена. Важно је да што више примера ученици ураде самостално и сопственим темпом, док наставник, обилазећи их, прати њихов рад. Може се тражити од ученика да свако добијено решење прикажу на бројевној правој, чиме ће се вежбати одређивање места бројева на бројевној правој. Треба решити и одређени број сложенијих примера у којима треба прво обавити неке рачунске радње да би се добио неки од горе наведених типова једначина. Овим би се могло сматрати да је поступак решавања једначина довољно пута поновљен и да су га ученици усвојили.

Варијација 1. У геометрији се често задаци своде на решавање једначина и веома је важно указати ученицима да се у поступку решавања једначине ништа не мења од већ наученог. Једино што је различито јесте то што треба утврдити да ли добијено решење испуњава услове задатка, зависно од природе траженог елемента.

Пример 1. Обим правоугаоника је 42 cm, а једна његова странице је 12 cm. Колика је друга страница?

Пример 2. Средња дуж једнакокраког трапеза је 5 cm и једнака је његовом краку. Израчунати обим трапеза ако је његова већа основица 8 cm.

Варијација 2. Активност планирана за последњих десет минута редовног часа. На крају часа увек може да се да неки једноставан задатак у облику проблема којим ће се такође вежбати постављање и решавање једначина.

Пример. Марко је прво добио једну четвртину свог џепарца, после три дана још две петине џепарца и на крају месеца преосталих 14 динара. Колики је Марков џепарац?

Напомена. На сличан начин могу се обрадити и неједначине у скупу $\mathbf{Z}$, при чему треба ученицима указати да неједначине могу имати бесконачно много решења. Скуп свих решења једне неједначине треба увек приказати на бројевној правој.

Овај модел часа може да се користи и у VII и VIII разреду, с тим што ће се за коефицијенте узимати елементи из скупа рационалних, односно реалних бројева.

Начин праћења. Да ли су ученици научили да решавају једначине може се пратити кроз активности дате у варијацијама један и два, усменим проверама на сваком часу кад год се појави једначина коју треба решити и у склопу других наставних тема, као и писменим проверама различите дужине трајања.

Узрасни ниво: VII или VIII разред

Наставна тема: Скупови бројева и бројевна права

Циљеви: Утврђивање познавања и разликовања природних, целих, рационалних и ирационалних бројева. Приказивање бројева на бројевној правој. Обнављање појма пресликавања и подскупа.

Средства: Оловке у боји, графофолије.

Реализација: Планирано је да траје два школска часа. Како овако припремљен материјал може да прати и цело одељење, то се могу користити и редовни часови.

Замисао је да се прво кроз неколико питања и одговора обнове основне чињенице о конкретном скупу бројева а затим прикаже одговарајућа фолија. Показујући на фолији и цртајући у свескама ученици ће још једном поновити најбитније о сваком скупу бројева.

а) Обновити: Како зовемо скуп $\mathbf{N}$? Шта су елементи скупа $\mathbf{N}$? Како се зову? Имају ли скупови $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ најмањи број? Имају ли скупови $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ највећи број? Можемо ли их графички приказати?

Приказати фолију $F1$. Уочити следеће:

– сваки природан број има своје место на бројевној правој,
– нула има своје место на бројевној правој,
– скуп $\mathbf{N}$ је подскуп скупа $\mathbf{N}_0$.

б) Обновити: Шта чини скуп целих бројева? Како га означавамо? Постоји ли највећи и најмањи цео број?

Приказати фолију $F2$. Уочити следеће:

– сваки природан број је и цео број,

– скуп $\mathbf{N}$ је подскуп скупа $\mathbf{Z}$,

– сваки цео број има своје место на бројевној правој,

– десно од нуле су позитивни цели бројеви,

– лево од нуле су негативни цели бројеви,

– супротни бројеви се налазе са разних страна, а једнако су удаљени од нуле.

в) Обновити: Које бројеве, осим целих, још познајемо? Како их записујемо? Може ли се сваки цео број написати у облику разломка?

Приказати фолију $F3$. Уочити следеће:

– сви цели бројеви су и рационални бројеви,

– важи: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$,

– сваки рационалан број има своје место на бројевној правој,

– десно од нуле су позитивни рационални бројеви,

– лево од нуле су негативни рационални бројеви,

– сваки рационалан број $\dfrac{p}{q}$ има супротан број $-\dfrac{p}{q}$ и они су на бројевној правој симетрично распоређени у односу на нулу,

– сваки рационалан број који није цео налази се између два узастопна цела броја; указати ученицима како се одређују та два цела броја искључиво на конкретним позитивним бројевима.

Напомена 1. На свакој фолији оставити неколико бројева чије место на бројевној правој није назначено, тако да се у току рада то учини и на тај начин провери да ли ученици раде са разумевањем.

Напомена 2. Фолије треба урадити у разним бојама, са истом јединицом, тако да се могу преклопити и тако на очигледан начин демонстрирати однос скупова $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$.

г) Какви су бројеви $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$? Како их зовемо? Могу ли се овакви бројеви написати у облику разломка? Имају ли овакви бројеви место на бројевној правој? Шта је њихова тачна вредност? Како одређујемо конструкцијом места на бројевној правој таквих бројева? Како одређујемо приближну вредност оваквих бројева и како је користимо?

Приказати фолије $F4$ и $F5$ које треба да имају исту јединицу. Прво са ученицима анализирати фолију $F5$ и констатовати да се помоћу „лепезе троуглова“ може конструисати дуж чија ће мера бити корен било ког природнг броја; затим, користећи Талесову теорему о пропорционалности одсечака указати ученицима на конкретним примерима како се конструише $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ и слично.

Даље, на фолији $F4$ уочити следеће:

- сваки ирационалан број има своје место на бројевној правој,
- ирационални бројеви нису рационални, тј. $\mathbf{I} \cap \mathbf{Q} = \varnothing$,
- позитивни ирационални бројеви су десно од нуле,
- негативни ирационални бројеви су лево од нуле,
- постоје парови супротних ирационалних бројева и њихова места на бројевној правој су симетрична у односу на нулу.

Ово последње треба искористити приликом давања упутства за тражење места неког конкретног ирационалног броја на бројевној правој. Осим тога, користити и приближну вредност и процену између која два суседна цела броја се тај број налази.

Између овако планирана два часа, чије ће целине одредити наставник, зависно од групе ученика са којима се ради, треба ученицима задати домаћи задатак.

Пример. На бројевној правој прикажи бројеве из скупа

$$A = \left\{ -5, \sqrt{3}, \frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{20}{5} \right\}$$

и природне бројеве обележи плавом бојом, негативне целе наранџастом, рационалне који нису цели зеленом, ирационалне црвеном бојом.

Узрасни ниво: VII и VIII разред

Наставна тема: Обим и површина геометријских фигура

Циљеви: Обнављање појмова троугла и четвороугла; утврђивање појма обима и површине геометријске фигуре; повезивање са другим садржајима; решавање једначина, подударност троуглова, пропорције, сличност троуглова, процентни рачун, примена ових знања.

Средства: Модел од картона (стиропора) за фланелограф, прибор за цртање

Реализација: Ова наставна тема може да траје један или више школских часова редовне наставе или неког другог облика наставе. Наставник треба да припреми задатке и да оспособи ученике да их самостално решавају. Ученици могу бити подељени у мање групе.

Пример. Конструиши једнакостранични троугао ABC странице 4 cm. Затим нацртај правоугаоник чија је једна страница AB, а наспрамна страница пролази кроз средиште висине троугла која одговара страници AB.

Напомена. Приликом цртања слике наставник може да прати да ли ученици умеју исправно да користе прибор за цртање, да ли разумеју текст задатка, да ли разликују геометријске појмове: једнакостранични троугао, висина која одговара страници, средиште дужи (и да ли умеју да га конструишу), правоугаоник (и његову особину да су му наспрамне странице паралелне и једнаке).

Ако се користи табла, слика је:

Ако се користи фланелограф, модел припремити да може и овако да се раздвоји:

Ученици могу да обоје различитим бојама у својим свескама поједине геометријске ликове који се уочавају на слици.

После завршене конструкције наставник може да формулише захтеве, полазећи од једноставнијих ка све сложенијим.

Прва група захтева. Ученик вежба да у датој целини уочи део који испуњава неки критеријум.

– Колико троуглова уочавате на овој слици?
– Колико једнакостраничних троуглова има на слици?
– Колико правоуглих троуглова има на слици?
– Колико четвороуглова има на слици?

Друга група захтева. Ученик вежба повезивање појма обима, површине са одговарајућом формулом а, такође, и мерне јединице за дужину и површину.

- Израчунај обим троугла ABC.
- Израчунај обим правоугаоника $ABNK$.
- Израчунај обим фигуре на слици.
- Израчунај површину троугла ABC.
- Израчунај површину правоугаоника $ABNK$.
- Израчунај површину пресека (у скуповном смислу) троугла ABC и правоугаоника $ABNK$.
- Израчунај површину разлике (у скуповном смислу) правоугаоника $ABNK$ и троугла ABC.
- Израчунај површину целе фигуре.
- Који проценат површине правоугаоника $ABNK$ је површина трапеза $ABML$?
- Који проценат површине целе фигуре је површина троугла ABC?

Трећа група захтева. Ученик вежба да користи неке основне принципе математичког закључивања и доказивања.

- Зашто су површине троугла ABC и правоугаоника $ABNK$ једнаке?
- Доказати подударност $\triangle ALK$ и $\triangle LEC$ (на фланелографу се ти ликови могу довести до поклапања).
- Доказати да су $\triangle ABC$ и $\triangle LMC$ слични.
- Може ли се дата геометријска фигура разложити на подударне троуглове? Колико их има? Образложи свој закључак. (Приказати разлагање на фланелографу, обојити у свескама по принципу шаховске табле).

Четврта група захтева. Вежбање одређивања функционалне зависности за две величине.

– Изрази странице правоугаоника $ABNK$ у функцији висине h троугла ABC.
– Изрази странице трапеза $ABML$ у функцији странице a троугла ABC.
– Изрази обим трапеза $ABML$ у функцији висине h троугла ABC.

Варијација. Активност је планирана за последњих десет минута редовног часа. Зид, чије су димензије као на слици, треба обложити керамичким плочицама димензија $15\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm}$. Колико плочица ће прекрити зид?

Одељење се може поделити на групе, тако да једна група рачуна површину зида у cm^2 и дели је површином једне плочице у cm^2; друга група одређује колико се плочица садржи у једном квадратном метру и тако долази до траженог броја плочица, а трећа група може да „почне да прекива“ зид плочицама и да их преброји.

Напомена. Овакав задатак се може задати и за домаћи, а следећег часа га коментарисати. С обзиром да ће се у једном начину решавања појавити рационални бројеви и њихове приближне вредности у децималном запису, треба искористити прилику да се провери разумевање ових појмова. Свакако треба указати на то да је увек брже у рачуну сматрати да је зид цео правоугаоник, па од његове површине одузети површину мањег правоугаоника, шрафираног на слици.

ОБАВЕШТЕЊЕ

СВЕТСКИ КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА

Берлин, 18–27. август 1998.

(наставак)[1]

У стручном делу конгреса учествовало је преко 3000 математичара из целог света који су излагали своје резултате у 19 секција. Посебна 45-минутна излагања имали су позвани предавачи које је одредила специјална комисија именована од стране Извршног одбора Светске математичке уније. Овај пут изузетну част да буде међу тим позваним предавачима имао је и један наш математичар — **Стево Тодорчевић**, научни саветник Математичког института у Београду, тренутно професор на C.N.R.S., Université Paris VII и University of Toronto. Он је у секцији за Математичку логику одржао предавање са темом „*Basis Problems in Combinatorial Set Theory*“ („Проблеми база у комбинаторној теорији скупова“).

[1] Први део извештаја са Конгреса објављен је у претходном броју Наставе математике