др Шефкет Арсланагић

# РАЗНИ НАЧИНИ РЈЕШАВАЊА ЈЕДНОГ ТЕ ИСТОГ МАТЕМАТИЧКОГ ЗАДАТКА

Прије неколико година један је савјетник за наставу математике на скупу професора математике средњих школа узвикнуо: „Доста је било задатака! С тим треба престати. У настави се мора учити математичка теорија." Ова изјава савјетника је у приличној мјери изненадила и донекле шокирала присутне наставнике. Поготово други дио изјаве у којем је савјетник збирке задатака прогласио необавезном литературом и такорећи изричито забранио присутним професорима да захтјевају од својих ученика да их набаве.

Очигледно, у овом случају је испољено велико неразумјевање улоге и значаја задатака у настави математике средњошколског нивоа. Улога математичких задатака при реализацији свих оних циљева датих у наставним програмима је изузетно важна. Наравно и овдје, као и увијек, треба водити рачуна о мјери. Много задатака без јасне сврхе или тешких без потребне поступности јесу промашаји и то укључујемо у лошу наставу.

Не постоји строго правило како треба учити математику. Ученик учи онако како се њему чини да је најефикасније. Сваки ученик је личност са специфичним индивидуалним особинама. Међутим, постоје неке искуствено провјерене методе учења овог предмета. Прво се учи математичка теорија, упознају се дефиниције и аксиоме, затим се проучавају и доказују теореме. Послије тога се рјешавају задаци. Ако успјешно рјешавамо задатке, онда смо савладали теорију, ако имамо потешкоћа при рјешавању задатака, онда поново темељитије проучавамо теорију. Математичка теорија и рјешавање задатака су у корелационој вези.

За успјешно рјешавање задатака из математике треба се придржавати искуствених чињеница. Овдје бих цитирао ријечи чувеног америчког математичара и методичара (мађарског поријекла) George-a Polya-e које је он изрекао прије скоро пола вијека: „Корисније је један задатак ријешити самостално, него стотину ријешених задатак репродуковати. Боље је један математички задатак ријешити на више начина, различитим методама, него мноштво задатака ријешити истом методом."

Најбоља мотивација ученицима да рјешавају задатке биће свакако успјех при рјешавању проблемских задатака. Ако ученик успије самостално рјешити задатак који му је био тежак, осјетиће задовољство и посегнути за новим задатком у жељи да понови тај успјех.

У другом дијелу овог чланка даћемо више разних рјешења једног задатка из области алгебарских неједнакости имајући у виду значај горе цитираних ријечи великог George-а Polya-е.

Ријеч је о сљедећем задатку:

*Доказати да за $a, b > 0$ и $a + b \geqslant 1$ вриједи неједнакост*

$$a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}.$$

*Доказ 1.* Из $a + b \geqslant 1$ слиједи $(a+b)^2 \geqslant 1$, тј.

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 1. \tag{1}$$

Из очигледно тачне неједнакости $(a-b)^2 \geqslant 0$ слиједи

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Након сабирања (1) и (2) добијамо $2(a^2 + b^2) \geqslant 1$, тј.

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Сада из (3) слиједи $(a^2 + b^2)^2 \geqslant \frac{1}{4}$, тј.

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geqslant \frac{1}{4}, \tag{4}$$

а из очигледно тачне неједнакости $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$, слиједи

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geqslant 0. \tag{5}$$

Након сабирања (4) и (5) добијамо $2(a^4 + b^4) \geqslant \frac{1}{4}$, тј. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$. Вриједи једнакост ако и само ако је $a = b$ и $a + b = 1$, тј. за $a = b = \frac{1}{2}$.

*Доказ 2.* На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине два позитивна броја $(K \geqslant A)$, слиједи $\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$, тј.

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2. \tag{6}$$

Такође, због исте неједнакости $(K \geqslant A)$ имамо $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2}$, тј.

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^4. \tag{7}$$

Сада из (6) и (7) добијамо да је $\frac{a^4 + b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^4$, тј. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}(a + b)^4$, а одавде, због $a + b \geqslant 1$, $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$. Једнакост вриједи ако и само ако је $a = b = \frac{1}{2}$.

*Доказ 3.* Овдје ћемо употребити смјену због $a + b \geqslant 1$ $(a, b > 0)$:

$$a = \frac{1}{2} + x, \quad b = \frac{1}{2} - y, \quad \text{гдје је } x - y \geqslant 0.$$

Сада имамо

$$a^4 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + x^4,$$

$$b^4 = \left(\frac{1}{2} - y\right)^4 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - 2y^3 + y^4,$$

а одавде након сабирања

$$a^4 + b^4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(x - y) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 2(x^3 - y^3) + (x^4 + y^4),$$

тј. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ (због $x - y \geqslant 0$).

Ако је $a + b = 1$, тада за $x = y = 0$ слиједи $a = b = \frac{1}{2}$ те $a^4 + b^4 = \frac{1}{8}$, а за $x = y \neq 0$ вриједи строга неједнакост $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$. Ако је $a + b > 1$, тада је $x - y > 0$, тј. $x > y$ и потом $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$.

*Доказ 4.* Функција $f(x) = x^n$ $(x > 0,\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2)$, због $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ је конвексна и слиједи

$$\frac{x_1^n + x_2^n}{2} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n \qquad x_1, x_2 > 0. \tag{8}$$

За $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $n = 4$ се из (8) добија $\frac{a^4 + b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$, тј. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}(a+b)^4$. Сада се одавде због $a+b \geqslant 1$ добија $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$, са једнакошћу ако и само ако је $a = b = \frac{1}{2}$.

*Напомена.* Неједнакост (8) се лако може доказати помоћу математичке индукције, а онда користити за доказ дате неједнакости као у претходном доказу.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić: *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Doktorska disretacija, PMF, Sarajevo 1998.

[2] G. Polya: *Kako ću riješiti matematički zadatak?*, Školska knjiga, Zagreb 1966.