др Милош Арсеновић

ТЕОРЕМА О СМЕНИ ПРОМЕНЉИВЕ КОД ВИШЕСТРУКОГ ЛЕБЕГОВОГ ИНТЕГРАЛА

Теорема о смени променљиве код вишеструког интеграла се доказује на један од следећа два начина.

Први је заснован на свођењу теореме, путем разлагања јединице и локалног разлагања дифеоморфизма на композицију једноставних пресликавања, на случај када се смена обавља пресликавањем облика $x \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, h(x^1, \dots, x^n))$. Такви докази се најчешће односе на Риманов интеграл и могу се наћи, на пример, у [Ru1] и [Sp].

Други, који формализује интуитивно јасну релацију $dy = |J_f(x)|\,dx$ за $y = f(x)$, се често спроводи позивањем на дубље резултате теорије мере, на пример на теорему о диференцирању апсолутно непрекидних и сингуларних мера у $\mathbf{R}^n$.

Наш циљ је да овде дамо један доказ теореме о смени променљиве за вишеструки Лебегов интеграл који од резултата теорије мере захтева само теорему о јединствености продужења мере. Кључну улогу у доказу игра расуђивање које се јавља у доказу теореме о инверзној функцији (упореди са [Ca]), види релацију (3) ниже.

Теорема 1. *Нека је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ дифеоморфизам класе C^1 између отворених скупова $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$, тј. пресликавања $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ су непрекидно диференцијабилна. Нека је $\varphi : \Omega_2 \to \mathbf{C}$ Борелова функција. Тада важи:*

1. *$\varphi \circ f : \Omega_1 \to \mathbf{C}$ је такође Борелова.*
2. *За $\varphi \geqslant 0$ је*

$$\int_{\Omega_2} \varphi(y)\,dy = \int_{\Omega_1} \varphi(f(x))|J_f(x)|\,dx. \tag{1}$$

3. *Ако је $\varphi \in L^1(\Omega_2)$, онда је $(\varphi \circ f)|J_f| \in L^1(\Omega_1)$ и важи горња формула.*

Теорема важи и под слабијим претпоставкама на пресликавање f, али тада доказ постаје сложенији. На пример, у [Mi] је доказана следећа теорема:

Теорема 2. *Нека је $f : U \to V$ хомеоморфизам између отворених скупова $U, V \subset \mathbf{R}^n$ који је локално Липшицов, то јест, за сваки компакт $K \subset U$*

постоји константа L_K *таква да је* $\|f(x)-f(y)\| \leqslant L_K\|x-y\|$ *за све* $x, y \in K$. *(Тада је* f *скоро свуда диференцијабилно пресликавање на* U *на основу једне теореме Радемахера.) Тада важи*

1. $f(B)$ *је Борелов скуп за сваки Борелов скуп* $B \subset U$.
2. *Функција* μ *дефинисана са* $\mu(B) = m(f(B))$ *за сваки Борелов скуп* $B \subset U$ *је регуларна Борелова мера на* U *и* $\mu \ll m$.
3. *За сваки Лебег мерљив скуп* $E \subset U$ *имамо да је* $f(E)$ *Лебег мерљив подскуп од* V, $\mu(E) = m(f(E))$ *задаје регуларну Борелову меру* μ *на сигма алгебри Лебег мерљивих подскупова од* V *и*

$$\mu(E) = \int_E |\det f'(x)| dm(x).$$

Поред тога, ако је φ *интеграбилна на* $f(E)$ *(*E *је Лебег мерљив), тада је функција* $\varphi \circ f|\det f'|$ *интеграбилна на* E *и*

$$\int_{f(E)} \varphi(y) dm(y) = \int_E \varphi(f(x))|\det f'(x)| dm(x).$$

С друге стране, у књизи [Ru2] је дат доказ без претпоставке да је f локално Липшицова, али зато захтевајући диференцијабилност пресликавања f.

Докажимо теорему 1. Нека је $V \subset \mathbf{C}$ отворен, тада је $(\varphi \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\varphi^{-1}(V))$, $\varphi^{-1}(V)$ је Борелов па је и $f^{-1}(\varphi^{-1}(V))$ Борелов, јер је f хомеоморфизам.

Слично је и $\psi \circ f^{-1}$ Борелова функција ако је $\psi : \Omega_1 \to \mathbf{C}$ Борелова. Бирајући $\psi = \chi_E$ и користећи релацију $\chi_{f(E)} = \chi_E \circ f^{-1}$ закључујемо да је $f(E) \subset \Omega_2$ Борелов кад год је $E \subset \Omega_1$ Борелов. Сада је јасно да формула

$$\mu(E) = m(f(E))$$

задаје Борелову меру на Ω_1. Очигледно је са

$$\nu(E) = \int_E |J_f| \, dm$$

такође задана једна Борелова мера на Ω_1, дакле $d\nu = |J_f| \, dm$.

Претпоставимо да смо доказали да је $\mu = \nu$ (у чему се састоји суштина доказа). Тада је $m(f(E)) = \int_E |J_f| dm$ за сваки Борелов скуп $E \subset \Omega_1$. Ако је $F \subset \Omega_2$ Борелов и ако је $\varphi = \chi_F$, онда можемо применити горњу једнакост на $E = f^{-1}(F)$, што даје формулу (1) у овом специјалном случају:

$$\int_{\Omega_2} \chi_F(y) dy = m(f(E)) = \int_E |J_f(x)| dx = \int_{\Omega_1} \chi_F \circ f(x) |J_f(x)| dx.$$

Како су обе стране формуле (1) линеарне по φ, следи да она важи и за сваку просту позитивну функцију. Стандардном апроксимацијом произвољне позитивне мерљиве функције φ растућим низом простих функција φ_k и применом теореме о монотоној конвергенцији добијамо друго тврђење. Разлагањем функције φ у трећем делу теореме на њен позитиван и негативан део ($\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$) и позивањем на већ доказано видимо да формула (1) важи за реалне интеграбилне функције φ. Одатле, разлагањем на реалан и имагинаран део, следи општи случај.

За доказ једнакости мера ν и μ довољно је, на основу теореме о јединствености продужења мера, доказати да је $\nu(Q) = \mu(Q)$ за сваку коцку $Q = \prod_{j=1}^n [a_i, a_i + d) \subset\subset \Omega_1$. За доказ једнакости $\nu(Q) = \mu(Q)$ су нам потребна следећа разматрања.

Простор $\mathbf{R}^n$ сматрамо снабдевеним нормом $\|x\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x^j|$, $x = (x^1, \dots, x^n)$. Тада је $\overline{B}(x_0, r) = \prod_{j=1}^n [x_0^j - r, x_0^j + r]$. Такође, норме линеарних оператора $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ се узимају у односу на уведену max норму.

Нека је $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r) \subset \Omega_1$. Тада је, на основу теореме о коначном прираштају примењене на пресликавање $x \mapsto f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$,

$$\|f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\| \leqslant \|x - x_0\| \sup_{[x_0,x]} \|f'(x) - f'(x_0)\| \leqslant \omega(x_0, r)r,$$

за свако $x \in \overline{B}$, где је $\omega(x_0, r) = \max_{\xi,\eta\in\overline{B}} \|f'(\xi) - f'(\eta)\|$. Одатле следи да је

$$\begin{aligned} f(\overline{B}) &\subset f(x_0) + f'(x_0)\overline{B}(0, r) + \overline{B}(0, r\omega(x_0, r)) \\ &\subset f(x_0) + f'(x_0)[\overline{B}(0, r) + f'(x_0)^{-1}\overline{B}(0, r\omega(x_0, r))]. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо

$$(2) \qquad f(\overline{B}(x_0, r)) \subset f(x_0) + f'(x_0)\overline{B}(0, r(1 + \|f'(x_0)^{-1}\| \max_{\xi,\eta\in\overline{B}} \|f'(\xi) - f'(\eta)\|)).$$

Претпоставимо да је и

$$\max_{\xi,\eta\in\overline{B}} \|A^{-1}\| \, \|f'(\xi) - f'(\eta)\| \leqslant \epsilon < 1,$$

где је $A = f'(x_0)$. Докажимо да је тада

$$(3) \qquad f(B(x_0, r)) \supset f(x_0) + f'(x_0)B(0, r(1 - \epsilon)).$$

Уведимо $\varphi(x) = x - A^{-1}(f(x) - y_0)$, где је $y_0 = f(x_0)$. На основу теореме о коначном прираштају следи да је

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| &\leqslant \|x_1 - x_2\| \sup_{[x_1,x_2]} \|I - A^{-1}f'(\xi)\| \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| \, \|A^{-1}\| \sup_{[x_1,x_2]} \|f'(x_0) - f'(\xi)\| \leqslant \epsilon\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

за x_1, x_2 из $\overline{B}$. Одаберимо сада $y_0 + Az \in y_0 + f'(x_0)B(0, r(1-\epsilon))$, $z \in B(0, r(1-\epsilon))$. Нека је

$$(4) \qquad x_{m+1} = z + \varphi(x_m) \qquad m = 0, 1, \dots .$$

Докажимо да сви чланови овог низа припадају лопти $B(x_0, r)$. То је очигледно тачно за x_0, препоставимо да $x_0, \dots, x_m$ припадају B. Тада је, на основу горње процене,

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})\| \leqslant \epsilon\|x_m - x_{m-1}\| \cdots \leqslant \epsilon^m\|x_1 - x_0\| = \epsilon^m\|z\|$$

јер је $x_1 - x_0 = z + \varphi(x_0) - x_0 = z + x_0 - A^{-1}(f(x_0) - y_0) - x_0 = z$. Следи да је

$$\begin{aligned}\|x_{m+1} - x_0\| &\leqslant \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leqslant \|z\|(1 + \epsilon + \cdots + \epsilon^m) < \frac{\|z\|}{1-\epsilon} < r\end{aligned}$$

па видимо да заиста имамо дефинисан низ x_m у B. Поред тога, из горњих процена следи да је векторски ред $x_0 + \sum_{m=0}^{\infty}(x_{m+1} - x_m)$ апсолутно конвергентан, те конвергира елементу $x \in \mathbf{R}^n$. Дакле, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, очигледно $x \in \overline{B}(x_0, \frac{\|z\|}{1-\epsilon})$ јер сви чланови x_m припадају тој затвореној лопти. Преласком на лимес у (4) добијамо да је $x = z + \varphi(x)$ одакле лако следи да је $f(x) = y_0 + Az$. Овим смо доказали (3).

Нека је сада $Q = \prod_{j=1}^{n}[a_i, a_i + d) \subset\subset \Omega_1$, и задајмо $\epsilon > 0$. С обзиром да је f' непрекидна функција на компакту $\overline{Q}$, постоји подела коцке Q на коцке $Q_p = \prod_{j=1}^{n}[a_i + dp_i/2^k, a_i + d(p_i+1)/2^k)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, такве да је $\|f'(\xi) - f'(\eta)\| < \epsilon$ кад год ξ и η припадају истој коцки $\overline{Q}_p$. Даље, $\|(f')^{-1}\|$ је такође непрекидна па постоји $M < +\infty$ такво да је $\|(f'(x))^{-1}\| \leqslant M$ за свако $x \in \overline{Q}$. Означимо са x_p центар лопте Q_p. Примењујући (3) и (2) на лопте Q_p добијамо да је

$$\begin{aligned}f(x_p) + f'(x_p)B(0, d2^{-k-1}(1-\epsilon)) &\subset f(Q_p) \subset f(\overline{Q}_p) \\ &\subset f(x_p) + f'(x_p)\overline{B}(0, d2^{-k-1}(1 + M\epsilon)).\end{aligned}$$

Како је Лебегова мера транслаторно инваријантна и како је $m(A(E)) = |\det A| m(E)$ за сваки Борелов скуп E и сваки линеаран оператор $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, следи да је

$$(1-\epsilon)^n |\det f'(x_p)| m(Q_p) \leqslant m(f(Q_p)) \leqslant (1 + M\epsilon)^n |\det f'(x_p)| m(Q_p).$$

Сумирајући ове неједнакости и користећи чињеницу да је $f(Q)$ једнако дисјунктној унији скупова $f(Q_p)$, добијамо да је

$$(1-\epsilon)^n \sum_p |\det f'(x_p)| m(Q_p) \leqslant m(f(Q)) \leqslant (1 + M\epsilon)^n \sum_p |\det f'(x_p)| m(Q_p).$$

Обзиром да је $\epsilon > 0$ произвољно и да $\sum_p |\det f'(x_p)| m(Q_p)$ конвергира ка Римановом интегралу $\int_Q |J_f(x)| dx$ када дијаметар поделе тежи ка нули, следи да је $m(f(Q)) = \int_Q |J_f(x)| dx$, то јест да је $\mu(Q) = \nu(Q)$, чиме је доказ завршен.

ЛИТЕРАТУРА

[Ca] Cartan, H.: *Calcul Differentiel, Formes Differentielles*, Hermann, Paris 1967.

[Mi] Mirković, B.: *Teorija mera i integrala*, Naučna knjiga, Beograd 1980.

[Ru1] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1964.

[Ru2] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Sp] Spivak, M.: *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.