Миомир Анђић

МОРЛИЈЕВА ТЕОРЕМА ЗА ТРОУГАО

1. Увод. Прије него што је Еуклид сачинио своје генијално дјело „Елементи“, научном методу проучавања геометрије у великој мјери допринијели су Талес Милећанин (око 640–550. г. прије н.е), Питагора (569–496. г. п.н.е), Хипократ из Хиоса (око 440. г. п.н.е) и Еудоксо (408–355. г. п.н.е), један од Еуклидових учитеља (други његов учитељ био је Платон). Талесу се приписује да је приликом једне његове посјете Египту израчунао висину тамошњих пирамида; он је уочио једнакост углова на основици једнакокраког троугла; њему се приписује став да је троугао одређен једном страницом и угловима на њој, што му је омогућило да израчуна и растојања бродова на мору од обале и др. Много су значајнији резултати Питагоре и његових ученика. Питагора је рођен на Самосу, Извјесно вријеме је био у Египту, а 529. г. п.н.е. преселио се у јужну Италију и у Таранту основао своју школу (тзв. ред Питагорејаца).

Чланак који слиједи односи се на један проблем везан за троугао, који је стар 100 година. Тачније, тврђење које слиједи носи назив *Морлијева теорема*, а названа је тако према америчком математичару Ф. Морлију (Frank Morley). Доказана је 1899. године, али не знамо како. Њена формулација је проста, али доказ није тако очигледан. Извешћемо га користећи тригонометрију, а може се доказати и елементарније.

2. Тврђење. *Сусједне трисектрисе*[1] *унутрашњих углова произвољног троугла сијеку се у тјеменима једнакостраничног троугла (пресјечне тачке нијесу темена полазног троугла).*

Доказ. Уводећи ознаке као на слици 1, при чему је $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$ и примјењујући синусну теорему на троуглове ABC и ABK имамо

$$\frac{c}{\sin 3\gamma} = 2R \quad \text{и} \quad \frac{c}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = \frac{|AK|}{\sin\beta},$$

гдје је R дужина полупречника кружнице описане око $\triangle ABC$.

[1] Трисектрисе су двије полуправе које садрже тјеме угла и исти дијеле на три једнака дијела.

Сл. 1 Сл. 2

Коришћењем једнакости $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi/3$, $\sin 3\alpha = \sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ и $4\sin(\pi/3+\alpha)\sin(\pi/3-\alpha)=3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, из последње двије релације слиједи

$$\begin{aligned}|AK| &= 2R\,\frac{\sin\beta\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R\,\frac{\sin\beta\sin(\pi-3\gamma)}{\sin(\pi/3-\gamma)}\\ &= 2R\,\frac{\sin\beta\sin 3\gamma}{\sin(\pi/3-\gamma)} = 2R\sin\beta\sin\gamma\frac{3\cos^2\gamma-\sin^2\gamma}{\sin(\pi/3-\gamma)}\\ &= 2R\sin\beta\sin\gamma\cdot 4\sin(\pi/3+\gamma)\frac{\sin(\pi/3-\gamma)}{\sin(\pi/3-\gamma)}\\ &= 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\pi/3+\gamma).\end{aligned}$$

Аналогно добијамо $|AL| = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\pi/3+\beta)$, одакле је

$$\frac{|AK|}{\sin(\pi/3+\gamma)} = \frac{|AL|}{\sin(\pi/3+\beta)} = 8R\sin\beta\sin\gamma.$$

Посматрајмо сада помоћни троугао IJX са унутрашњим угловима α, $\pi/3+\beta$, $\pi/3+\gamma$ чија је једна страница дужине $|AK|$ (сл. 2). Примијењујући на тај троугао синусну теорему, добијамо да је он подударан троуглу AKL. На основу тога слиједи такође да је

$$\frac{|KL|}{\sin\alpha} = 8R\sin\beta\sin\gamma, \quad \text{тј.} \quad |KL| = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Примјењујући исти поступак, од почетка, на троуглове ABC и ACL, а такође и на троуглове ABC и BCM имамо

$$|LM| = |MK| = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

одакле, заједно са претходном релацијом, слиједи да је троугао KLM једнакостраничан.

Напомена. На основу претходног је $\angle AKL = \pi/3 + \beta$, а сличним расуђивањем је $\angle BKM = \pi/3 + \alpha$. Како је $\angle AKB + \angle AKL + \angle LKM + \angle BKM = 2\pi$, то слиједи да је $\angle LKM = \pi/3$. Аналогно се добија $\angle KLM = \angle LMK = \pi/3$, одакле такође закључујемо да је $\triangle KLM$ једнакостраничан.

3. Задаци.

1. Користећи слику 1 доказати да су троуглови KLN, LMQ и KMP једнакокраки (и ово је једна од Морлијевих теорема).

2. Морлијеву теорему доказати елементарним путем.

3. Сваки унутрашњи угао конвексног четвороугла је полуправим подијељен на 4 једнака угла. Спољашње полуправе, поред тјемена четвороугла, сијеку се у тјеменима новог четвороугла. Да ли је тај нови четвороугао ромб?

4. Распоредити шест тачака у равни тако да одређују максималан број дужи које немају заједничких унутрашњих тачака. Који је то број?

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин: *Математика в понятиях, определенях и терминах*, част 2, Москва 1982.

ОБАВЕШТЕЊЕ

10. КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА ЈУГОСЛАВИЈЕ

Херцег Нови, 25–30. мај 1999.

(наставак[2])

Организатори конгреса су: Институт за математику ПМФ у Новом Саду, Одсјек за математику и рачунарске науке ПМФ у Подгорици, Савез друштава математичара Југославије, Друштво математичара Србије и Друштво математичара и физичара Црне Горе.

Учесници треба да попуне и пошаљу пријаве Организационом одбору конгреса до 15.02.1999. Друго обавештење (у којем ће бити наведен и износ котизације) биће послато учесницима до 01.04.1999.

Контакт адреса и телефони: Организациони одбор X КЈМ '99, Институт за математику, Природно-математички факултет, трг Д. Обрадовића 4, 21000 Нови Сад, тел. (021) 350-449, 58-136, факс (021) 350-458, e-mail: `matkon10@unsim.ns.ac.yu`.

Детаљнија обавештења могу се наћи на Internet адреси

`www.unsim.ns.ac.yu/events/matkon10/`

[2] Прво обавештење о Конгресу објављено је у претходном броју *Наставе математике*