НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1998, XLIII, 1–2, стр. 2–10

др Богољуб Станковић

ФУНКЦИЈА И ЊЕНА УОПШТЕЊА

Увек је корисно да се подсетимо на тешкоће и на разне „опасности“ које су присутне при остваривању програма математике у школи. При томе су задаци наставника веома комплексни: савлађивање преобимне материје и истовремено развијање начина мишљења ученика; материја се мора прилагодити узрасту ученика, а при томе одржати строгост математичког излагања. То може само наставник који добро познаје предмет наставне јединице, али у њеним ширим оквирима. Непрецизности и недоречености које ученик једном усвоји, тешко се исправљају и оне га прате у даљем школовању.

Функција је један од оних математичких појмова који прожимају готово целу математику, а тиме и њену наставу на разним ступњевима. Зато је и погодна тема разговора већег броја учесника.

Моје излагање састојаће се из два дела. У првом делу осмотрићемо пут изградње данашње дефиниције функције, који је трајао више од 200 година. На том путу јављале су се неодређености, непрецизности, неодговарајуће речи, ... Сва та лутања и данас имају одјека код ученика при усвајању дефиниције функције и операција са њима. И поред настојања наставних програма, наставника и уџбеника, савремена дефиницја функције, за знатан број ученика, остаје недовољно повезана са даљим њеним коришћењем. Верујем да ће сагледавање историјског пута помоћи да се избегну све замке код обраде функције и операција са функцијама.

У другом делу пратићемо изучавање појединих класа функција које се намећу код усавршавања математичког апарата или код изучавања математичких модела разних процеса и појава. Посебно ћемо указати како се ширила једна класа линеарних непрекидних функционела до данашњих дана. То треба да буде допринос ширем сагледавању ове материје и посредна помоћ у припреми наставних јединица које се односе на функције.

Да почнемо са дефиницијом функције какава се данас користи, да бисмо јасније сагледали сва успутна лутања кроз историју. При томе полазимо од два појма прихваћена као основна (која не објашњавамо једноставнијим): скуп и опредељивање (кореспонденција).

Пленарно предавање на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, Београд, јануара 1998.

Нека су дата два скупа A и B. Кажемо да је дефинисана функција над скупом A ако сваком елементу $x \in A$ знамо да определимо један и само један елемент $y \in B$.

Запазимо да су скупови A и B потпуно произвољни, а опредељивање није ограничено на било који начин.

Наш поглед на пут изградње појма функције почећемо мишљењем М. Клајна (M. Kline) [8] по коме су у периоду класичне грчке математике изучаване посебне криве дефинисане у смислу кретања, а не функционалне везе. Према В. Ј. Кацу (V. J. Katz) [7] грчки математичари никада нису посматрали, на пример, брзину и убрзање као независне величине које се мере. Са брзином се радило само упоређујући растојање и време, па су се због тога могле поредити само просечне брзине над одређеним временским периодима.

У тринаестом и почетком четрнаестог века израсле су нове математичке идеје (види [7], стр. 289–293) кроз тежњу да се успостави однос силе F, која делује на неки објекат, њеног отпора R и његове брзине v. То је захтевало математичку теорију размера. П. Велингфорд (P. Wallingford, 1291–1336) посебно је дефинисао размеру, њено састављање и дељење. Међутим, он је, држећи се класичне грчке математике, инсистирао да се размера може саставити само од величина исте врсте. То је искључило могућност да се брзина посматра као размера растојања и времена.

XIV век је са изучавањем брзине донео нове идеје у повезивању промена различитих величина. Немогуће је у оваквом излагању ући у све детаље и све кораке који су претходили изградњи појма функције. Скренули смо пажњу само на неке карактеристике.

Систематичније коришћење функционалне зависности почиње тек у XVII веку. Још је Галилеј (G. Galilei, 1564–1642) користио функционалну везу. Њу је он исказивао речима и језиком пропорција. На пример, он каже: „Путеви које пређе тело које из стања мировања пада униформо убрзаним кретањем, односе се једни према другим као квадрати временских интервала потребних да се пређу ови путеви.“ (види [8], стр. 338). Данас бисмо ми кратко написали: $s = kt^2$.

Први кораци изградње реалне функције реалне променљиве (када су скупови A и B из дефиниције скупови реалних бројева) чињени су током XVII века. Посебно су изучаване једноставне алгебарске функције и тригонометријске функције. Већина тих функција изражене су као тада познате криве или таблицама. Галилеј, који је изучавао путању пројектила избаченог под одређеним углом, посматрао је криву путање, параболу, као места покретне тачке. Њутн (I. Newton, 1642–1727) још 1676. пише: „Посматрам овде математичке величине не да се састоје од веома малих делова, већ као описане непрекидним кретањем.“

Све чешћа употреба кривих наметала је и појединачну ознаку. Уведене операције са тим ознакама нису тада биле увек и јасне. На пример, коришћена је и крива са ознаком a^x, $a > 0$. Шта је та ознака значила за x ирационално, није било тачно дефинисано.

Увођење нових операција са функцијама као што је интеграл, граница реда, ... наметнуло је потребу разликовања алгебарских од трансцендентних функција. Ипак, опсег и значај скупа трансцендентних функција схваћен је тек знатно касније. И поред тога већ је Лајбниц (G. W. Leibniz, 1646–1716) показао да функција $\sin x$ не може бити алгебарска (не може се написати помоћу четири основне операције и кореновања, у коначном броју). Њутн уводи реч *флуент* (што би се могло превести са способно за ток) да „означи однос између промењљивих“ (види [8], стр. 340). Лајбниц већ користи реч *функција* да означи „величине које зависе од промењљивих“ (види [8], стр. 340). Обележавање $y = f(x)$ је увео Ојлер (L. Euler, 1707–1783) у раду објављеном у Comm. Acad. Sci. Petrop. 7 (1734/35). Тако се уобличавао нови појам у математици који у ствари представља реалну функцију једне реалне промењљиве.

Почетак XVIII века носио је уверење код већине математичара да је функција у целини дата само једним аналитичким изразом. Такво је схватање посебно уздрмано дискусијом о решењима једначине жице која трепери. О томе ћемо касније нешто више рећи.

J. Бернули (Johann Bernoulli, 1667–1748) је први експлицитно формулисао шта подразумева под функцијом. Ипак се најчешће спомиње Ојлерова дефиниција: „Функција је било какав аналитички израз, конструисан на било који начин од промењљивих величина и константе“. Из његовог текста може се закључити да он под *изразом* мисли на полином, степени ред (за који још не говори о конвергенцији) као и на логаритамски и на тригонометријски израз. Он дефинише и функције више промењљивих као и функције са више вредности. Разликује имплицитну и експлицитну функцију. Алгебарска функција, прецизира он, јесте она у којој се јављају алгебарске операције. При томе је она рационална ако су те операције само сабирање, одузимање, множење и дељење; ирационална је ако се јавља и кореновање. Остале функције су трансцендентне (види [3], стр. 3–4 и [8], стр. 405). Напоменимо, поређења ради, данашњу дефиницију реалне алгебарске функције: $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbf{R}$ је алгебарска функција ако постоји полином $F(x,y)$ такав да је $F(x,y) = 0$ за $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbf{R}$.

Нове идеје о функцији посебно су постале актуелне током дискусије између Даламбера (J. d'Alembert, 1717–1783) и Ојлера око решења једначине жице која трепери

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \tag{1}$$

са граничним условом $y(t,0) = 0$, $y(t,1) = 0$ и почетним условом $y(0,x) = f(x)$, $\left.\dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Даламбер је показао да овај задатак има решење

$$y(t,x) = \frac{1}{2} g(at + x) - \frac{1}{2} g(at - x)$$

где је функција g непарна и периодична са периодом 2, а $g(x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Даламбер је сматрао да постоји само једно решење за све x одређено са $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где f мора имати и први и други извод. Функција је по њему дата аналитичким изразом; ако се две такве функције поклапају на једном интервалу, оне су једнаке за све x.

Ојлер је имао већ општије идеје о функцији. Он је прихватао да функција може да буде дата деловима познатих кривих, па чак и једноставно нацртаних кривих. Такве функције назвао је прекидним (иако оне по данашњој дефиницији непрекидности могу бити непрекидне). Таква је функција $f(x) = x$, $x \geqslant 0$, а $f(x) = -x$, $x < 0$. Види слику 1.

Сл. 1

Сл. 2

Са таквим идејама, око две године после Даламбера, Ојлер је написао свој рад о једначини жице која трепери. Посебно је интересантна његова дискусија о решењу, јер је у њој дошло до изражаја његово схватање функције. За њега почетна крива, одређена са $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, може бити дата једначином или само нацртана, чак иако се таква не може изразити једначином. За почетну криву важан је интервал $(0,1)$. Њено периодично продужење ван тога интервала не мора се узети у обзир. Разни делови продужења не морају бити дати једним истим аналитичким изразом, супротно Даламберу који је прихватао само аналитичке почетне криве и аналитичка решења. Ту лежи главна разлика између Даламбера и Ојлера.

У XIX веку Ојлерове идеје су се даље развијале уз нови подстрек који је дошао са резултатима Фуријеа (J. Fourier, 1768–1830). Он је показао да ред (који ми данас зовемо Фуријеов) може бити аналитички израз функције која је у разним интервалима дата различитим кривим, без обзира да ли се ти делови настављају непрекидно или не. Тако, када се функција $f(x) = x$ развије у Фуријеов ред на интервалу $(-\pi, \pi)$, функција представљена тим редом има график као на слици 2.

То је био ударац мишљењу, које је у почетку подржавао и Лагранж (J. L. Lagrange, 1736–1813), да је функција дефинисана својим вредностима у било ком малом интервалу (истина, то се показало тачно, али за врло уску класу аналитичких функција које пресликавају отворен скуп комплексних бројева у скуп комплексних бројева).

Коши (A. L. Cauchy, 1789–1857) уводи у свом раду „Cours d'analyse algébrique“ прво *промењљиву*: „ … промењљивом зовемо величину за коју се сматра да узима сукцесивно вредности, међусобно различите … “ Његова дефиниција функције је гломазна, па је нећемо ни наводити. Дирихле (P. G. Lejeune Dirichlet, 1805–1859) у раду „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen“ дао је следећу дефиницију функције: „ … y је функција од x ако свакој вредности x у датом интервалу одговара јединствена вредност y.“ Из његовог даљег текста види се да је то концепција функције блиска данашњој, када је реч о реалној функцији једне реалне променљиве.

Из овог кратког прегледа јасно се види како се тешко изграђивао појам функције. Не може се очекивати да ће ученици средњих школа појам функције лако схватити. О томе треба водити рачуна када се припремају и обрађују наставне јединице овога садржаја, Сва лутања са историјског пута имају одраз и код ученика данашњих школа, посебно код оних који имају смањен број часова математике.

Да ученик радо поистовећује функцију са аналитичким изразом, не треба никога уверавати. Када напише $\sqrt{1-x^2}$, он тражи у којој области је ова функција дефинисана. Ако напише $f(x) = x$, $x \geqslant 0$; $f(x) = -x$, $x < 0$, често ће рећи да се ту ради о две функције, а двоумиће се да ли је тако састављена функција непрекидна за $x = 0$.

Шта учинити да се отклоне неправилности у схватању појма функције код ученика? Прво, мора се дати тачна дефиниција са јасним објашњењима свих речи у њој. Мора се инсистирати да је функција дефинисана помоћу два скупа (у нашој дефиницији то су скупови A и B) и начина опредељивања елемената другог скупа елементима првог. Посебно треба указати да ако се измени скуп оригинала A, добија се друга функција. Подвлачити разлику између аналитичког израза и функције. При раду треба стално инсистирати, код сваке функције, на утврђивању сва три елемента који је дефинишу. Сигуран сам да се кроз наставну праксу стекну одабрани „лекови“, само их треба у довољној количини и на време употребити.

Крајем XIX века и почетком XX већ имамо коректну дефиницију реалне функције реалне променљиве и комплексне функције комплексне променљиве. Већ су се непрекидност, униформна непрекидност, гранични процеси, извод и интеграл ослобађали почетних некоректности и нетачних закључака. Стварана је теорија алгебарских, трансцендентних и елиптичких функција. Развојем интеграла дошле су до изражаја нове класе функција: мерљивих, мере нула, интеграбилних, ограничене варијације, ...

Треба запазити да су се развој појма функције, развој операција са функцијама и захтеви корисника математичког апарата међусобно прожимали и утицали на развој сваког од њих појединачно. Развој операција са функцијама захтевао је све разноврсније класе са прецизним дефиницијама и особинама. Све разноврснији математички модели који описују све компликованије процесе траже да се на све шире класе функција врше веома рестриктивне математичке операције. Обратно, ослобађање од ограничене представе о скуповима A и B, који улазе у дефиницију функције, омогућавало је проширивање скупа операција са њима и давало је могућности решавања све разноврснијих математичких модела.

Ригорозност у изучавању граничних процеса, а тиме и операција у скупу функција, откривало је колико се уносило ограничења при решавању математичких модела. Математички модели су најчешће садржавали обичне изводе, парцијалне изводе, интеграле, ... Њихово ригорозно третирање уносило је понекад толико ограничења на решења да је модел губио свој смисао. Дешавало се да се позната природна решења нису налазила међу математичким решењима одговарајућег модела. У таквим контрадикторним условима јавља се Хевисајдов (O. Heaviside, 1850–1925) рачун [4], у коме се са операцијом извода поступа као са реалним бројем, и Диракова (P. Dirac, 1902–1984) δ-„функција" која је једнака нули за све вредности $x \neq 0$ и чији је интеграл дуж $\mathbf{R}$ једнак јединици. То се све супротстављало тадашњем знању математике.

У овим размишљањима треба водити рачуна да је математички модел само приближна слика процеса кога описује. Решења таквог модела су само апроксимације правих решења самог процеса. Зато је прихватљиво очекивати да са сваким низом решења, и граница тога низа јесте решење, ако таква граница постоји. То је могуће ако су операције које улазе у математички модел непрекидне. Нажалост, у класичној математици (да тако назовемо математику изграђену до почетка XX века) ово није случај баш код оних операција које се најчешће јављају, а нису елементарне. То су само изразити примери симптома који су потресали математику са почетка XX века.

Математичари су прво покушали да нађу излаз у оквирима класичне анализе. Тако су се код више аутора јављала „слаба решења" парцијалних диференцијалних једначина, као и „турбулентна решења" Лереа (J. Leray, 1906–) [10]. Таква решења су решења само у једном ширем смислу. Ту је и рад Шварца (L. Schwartz, 1915–) [14] за који он сам каже да садржи зачетак теорије дитрибуција — уопштених функција. У исти круг идеја спадају и „коначни делови" дивергентних интеграла Адамара (J. Hadamard, 1865–1963) [2] који су омогућавали коришћење и операције са дивергентним интегралима.

Како су парцијалне диференцијалне једначине најчешћи математички модел разних природних процеса, задржаћемо се на парцијалним изводима нумеричке функције као индикатору тражених промена. Да би функција више реалних променљивих имала парцијални извод по одређеној променљивој, она по тој променљивој мора бити пре свега непрекидна. Нажалост, велики број природних процеса је са прекидима и не би могао да буде добро представљен математичким моделом у коме су парцијални изводи. Требало је зато проширити појам парцијалног извода да се он може применити и на прекидне функције, да при томе задржи природно значење, а да истовремено такво проширење буде непрекидно у новој топологији.

Врло брзо се показало да се за значајни корак у проширењу појма извода морало изаћи из класичне анализе. Морао се проширити скуп нумеричких функција и развити теорије у којима ће дефинициони скуп A, из дефиниције функције, бити знатно општији но што су подскупови реалних и комплексних бројева или њихових n-торки. Ове нове идеје преплитале су се са изградњом математичких структура које су донеле нови прилаз целокупној математици. У томе највише има заслуга француска школа Бурбакиста. Резултат ових истраживања је са једне стране теорија уопштених функција, а са друге стране интензивно изучавање посебне математичке структуре под именом векторско тополошких простора.

Да би се уопштила нумеричка функција, требало је одабрати класу функција од које ће се поћи, која ће бити довољно општа и која се природно намеће код изучавања разноврсних појава и процеса. Таква класа је класа L-локално интеграбилних по Лебегу (H. Lebesgue, 1875–1941). Њој припадају функције које над сваким ограниченим скупом у $\mathbf{R}^n$ имају Лебегов интеграл. Колико је скуп L општи показује чињеница да не знамо да конструишемо функцију која не припада L, знамо само да докажемо њену егзистенцију и то ако усвојимо аксиом избора. Зато и полазимо од скупа L.

Основна идеја би се могла овако упростити (види [15]): Тражи се скуп M са адитивном операцијом и више мултипликативних који би садржавао скуп L као подскуп. Рестрикције операција из M на L давале би класичне операције у L (сабирање, множење, ...). Поред тога, једна од мултипликативних операција, композиција, морала би бити непрекидна и имати особину да у M постоје такви посебни елементи који компоновани са елементима из L дају операције као што су: интеграл, извод, транслација, ... ако их ови елементи из L имају. Тиме бисмо једном операцијом обухватили најважније класичне операције, уопштили их на све елементе из M и имали њихову непрекидност. Тако би свака функција из L имала све изводе, у проширеном смислу у M, а тај проширени извод поклапао се са класичним када га тај елемент из L има. Уместо изучавања разних једначина које сада делимо на диференцијалне, парцијалне диференцијалне, интегралне, диферентне, као и њихове комбинације, ... решавали бисмо само једначине композиције, а операција композиције би била непрекидна.

До данас немамо тако идеално замишљен скуп M. Изучавани су и изучавају се скупови уопштених функција који су све ближе захтевима скупа M. Навешћемо колико се стигло у тим истраживањима до данашњих дана (види [16]).

Књиге Л. Шварца [14] садржавале су прву систематску обраду теорије једне класе уопштених функција — дистрибуција. Прво се дефинише основни скуп функција D. D се састоји од оних функција које пресликавају $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}$ а које имају све парцијалне изводе и које су нула изван неког ограниченог и затвореног скупа у $\mathbf{R}^n$ (имају коначан носач). Тај скуп је снабдевен структуром векторско тополошког простора над $\mathbf{C}$. У дефиницији уопштене функције — дистрибуције — скуп D ће играти улогу скупа A из дефиниције функције, а $\mathbf{R}$ улогу скупа B. Векторски простор линеарних непрекидних функција (функционела) које сваком елементу из D одређују један и само један реалан број зовемо простор дистрибуција и обележавамо са D'.

Анализираћемо колико скуп D' носи улогу замишљеног скупа M. Скуп D' садржи скуп локално интеграбилних функција L. Он је и стриктно шири од L; садржи δ-„функцију“. Тиме је δ-„функција“ добила своје право место, она је уопштена функција. У D' су дефинисане операције сабирања и множења константом. Њихове рестрикције у L дају обично сабирање функција и множење функције константом. Показано је да се у D' не може дефинисати мултипликативна операција која би имала особине множења функција и чија би рестрикција на L давала множење функција. Свака дистрибуција има све парцијалне изводе и сви су они непрекидне операције. Ако је нека дистрибуција дефинисана функцијом која има извод у класичном смислу, он је једнак изводу у смислу дистрибуција. Најзад, дефинисана је и једна мултипликативна операција, композиција (означена са $*$). Нажалост, она је дефинисана само за одређене класе дистрибуција. Композицијом произвољне дистрибуције са δ-дистрибуцијом са носачем у тачки c добија се транслација дистрибуције за c. Композиција парцијалног извода δ-дистрибуције са произвољном дистрибуцијом даје одговарајући парцијални извод дистрибуције, ... Из изложеног се види да D' само делимично испуњава услове које смо поставили за скуп M.

Природно се поставља питање, нисмо ли добили прешироk скуп? Гледано локално, D' је најмањи скуп у коме свака локално интеграбилна функција има све парцијалне изводе. Дистрибуције су данас незаменљив математички апарат теоријске физике.

Ако сузимо основни скуп D, добићемо шири скуп уопштених функција. Такав ужи скуп је скуп ултрадиференцијабилних функција са коначним носачем, кога обележавамо са D^*. Одговарајући простор линераних непрекидних функционела над D^* је простор ултрадистрибуција. Обележавамо га са $D^{*\prime}$. Он садржи простор дистрибуција, $D^{*\prime} \supset D'$ (види [9]). Простор ултрадистрибуција има све наведене особине дистрибуција. Сем тога, у њему се могу решавати и линеарне парцијалне диференцијалне једначине бесконачног реда.

Скуп Фуријеових хиперфункција, којег ћемо обележавати са Q, уведен је на други начин али се и он може дефинисати преко основног скупа, као скуп линеарних непрекидних функционела (види [6]). Основна особина Фуријеових хиперфункција је да је Фуријеова трансформација аутоморфизам скупа Q, што може бити од велике користи код решавања математичких модела. Најзад, Сато (M. Sato) је увео хиперфункције. Обележимо са B простор хиперфункција, у којем свака линеарна парцијална диференцијална једначина са константним коефицијентима и слободним чланом из B има решење и то се решење може проширити на цело $\mathbf{R}^n$. О карактеристикама разних класа уопштених функција види [16].

Основни недостатак свих ових скупова уопштених функција је то што су они снабдевени сиромашном алгебарском структуром, структуром векторског простора и због тога се могу користити само за линеарне математичке моделе. На следећој слици је дат однос наведених уопштених функција.

Сл. 3

Последњих година истражују се простори уопштених функција са богатијом алгебарском структуром. Ту спадају пре свега „нове уопштене функције Коломбоа“ (J. F. Colombeau) (види [1]) и алгебре уопштених функција Росингера (E. E. Rosinger) (види [12]).

Надам се да се из овог кратког текста може добити глобална слика о комплексности, значају и развоју појма функције до данашњег дана, а да ће они који желе детаљније упознавање наћи „прву помоћ“ у наведеној литератури.

Код припремања првог дела овог текста корисне сугестије добио сам од др Ђуре Паунића, професора Природно-математичког факултета у Новом Саду.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam 1985.

[2] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles lineares hyperboliques*, Paris 1932.

[3] T. Hawkins, *Lebesque's Theory of Integration*, The University of Wisconsin Press, Madison 1970.

[4] O. Heaviside, *On Operators in Mathematical Physics*, Proc. Roy. Soc. London **52** (1893), 504–529.

[5] A. J. Хинчин, *Осам предавања из математичке анализе*, Научна књига, Београд 1949.

[6] A. Kaneko, *Introduction to Hyperfunctions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.

[7] V. J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, Harper Collins College Publishers, New York 1972.

[8] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York 1972.

[9] H. Komatsu, *Ultradistributions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1 A, Math. **20** (1973), 23–105.

[10] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visquaux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[11] A. F. Monna, *Functional Analysis in Historical Perspective*, Oosthoek Publishing Company, Utrecht 1973.

[12] E. E. Rosinger, *Non-linear Partial Differential Equations, An Algebraic View of Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam 1990.

[13] M. Sato, *Theory of Hyperfunctions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1 A, **8** (1959), 139–193.

[14] L. Schwartz, *Théorie des distributions I, II*, Hermann, Paris 1951.

[15] B. Stanković, *Uopštene funkcije kao sastavni deo savremene matematike*, Vojvođanska akademija nauka i umetnosti, 1982.

[16] B. Stanković, *Generalized functions and applications of them*, Proceedings of PRIM-97 (u štampi).