НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1998, XLIII, 1–2, стр. 11–27

др Милојица Јаћимовић и др Изедин Крнић

ЗАПИСИВАЊЕ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА У ПОЗИЦИОНИМ СИСТЕМИМА

Историја начина записивања бројева веома је занимљива. Иако у савременом заснивању анализе начин записивања реалних бројева изгледа као сасвим техничко питање, оно је у развоју математике и чак у развоју цијеле цивилизације имало посебан значај. Историчари математике сматрају да се декадни систем, који је данас у широкој употреби, први пут појавио код Индуса, у VI вијеку. За записивање бројева Индуси нијесу користили цифру нула.

Каснији развој овог система није ишао ни брзо ни праволинијски. Ево неколико назнака.

Од Индуса декадни систем су преузели Арапи, али су тај систем, као и Индуси, користили само за записивање цијелих бројева. Астрономи, који су морали користити и разломке, радили су са шестдесетичним разломцима. У неким областима (мјерење времена, мјерење углова и слично) овај систем се и данас користи. За усвајање декадног бројног система у Европи значајна је појава књиге Liber abaci (преводи се са Књига из аритметике или само са Аритметика) Леонарда Пизанског (Фибоначи). Он је писао: „Девет је индуских знакова: $9, 8, \dots, 1$. Помоћу њих и помоћу знака 0 који се у арапском назива zephirium, може се записати сваки број.“ При томе је Фибоначи мислио на цијеле бројеве. Записивање разломака у десетичном бројном систему је у Европи постало општеприхваћено тек у XVII вијеку. Међутим, 1658 Блез Паскал се у књизи „De numeris multiplicibus“ залаже за другачији систем: „Десетични систем који је конструисан прилично неразумно, јесте, наравно, у складу са људским навикама, али није према захтјевима природне неопходности, како је склоно да мисли већина људи.“ Он је тврдио да је пожељно да се пређе на дванаестични систем и предложио је правило провјере дјељивости бројем 9 у таквом систему. Предлагани су и други системи са различитим основама. Шведски краљ Карл XII имао је намјеру да у својој земљи усвоји систем са основом 8. Погинуо је у једној бици па његова идеја није реализована.

Овђе разматрамо различите позиционе системе и начине записивања цијелих и реалних бројева у тим системима. Илуструјемо и како се записивање реалних бројева у облику бесконачних децималних разломака може користити за конструкцију интересантних примјера и доказе неких тврђења из математичке анализе.

1. Записивање цијелих бројева

Нека је q цио број, $|q| > 1$ и D коначан подскуп скупа цијелих бројева. Нас интересује да ли за сваки цио број α постоје природан број k и бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_k \in D$, $a_k \neq 0$, тако да је

$$\alpha = a_0 + a_1 q + \cdots + a_k q^k.$$

Одговор, наравно, зависи од избора броја q и скупа D. Када је одговор позитиван тада се пише

$$\alpha = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_{(q,D)}$$

или, без истицања скупа D, $\alpha = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_q$, и каже да пар (q, D) образује *позициони систем са основон q и скупом цифара D*. У том случају, бројеви $a_0, \ldots, a_k$ су цифре броја α у ситему (q, D). Специјално, ако је q природан број и $D = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, систем (q, D) је *стандардни систем са основом q*.

Теорема 1. *Сваки ненегативан цио број α се може, на јединствен начин, записати у стандардном систему са основом $q \in \mathbf{N}$, $q > 1$. При томе је $\alpha = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_q$ ако и само ако је $a_j = \beta_j - q\beta_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ гдје је*

$$\beta_0 = \alpha,\ \beta_j = [\frac{\beta_{j-1}}{q}],\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \beta_{k+1} = [\frac{\beta_k}{q}] = 0,$$

при чему је са $[x]$ означен највећи цио број $\leq x$.

Доказ. Нека су $a_0, \ldots a_k$ и $\beta_0, \ldots \beta_k, \beta_{k+1}$ одређени као у исказу теореме. Тада, на основу релације, $x - 1 < [x] \leq x$ имамо да је

$$a_j = \beta_j - q\beta_{j+1} = \beta_j - q[\frac{\beta_j}{q}] < \beta_j - q(\frac{\beta_j}{q} - 1) = \beta_j - \beta_j + q = q$$

и $a_j \geq \beta_j - q\frac{\beta_j}{q} = 0$. То значи да је за свако $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, a_j цифра стандардног система са основом q.

Множећи једнакост $a_j = \beta_j - q\beta_{j+1}$ са q^j, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, сабирајући тако добијене једнакости и узимајући у обзир да је $\beta_0 = \alpha$, добијамо

$$a_0 + a_1 q + \cdots + a_k q^k = \alpha,$$

односно $\alpha = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_q$.

Обрнуто, нека је

$$\alpha = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_q = a_0 + a_1 q + \cdots + a_k q^k, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots q-1\}, i = 0, 1, \ldots k$$

и $\beta_0 = \alpha$. Тада је $\beta_0 = a_0 + \beta_1 q$, гдје је

$$\beta_1 = a_1 + \cdots + a_k q^{k-1} = [\frac{\beta_0}{q}].$$

Одавде слиједи да је $a_0 = \beta_0 - \beta_1 q$. Слично, из једнакости $\beta_1 = a_1 + \cdots + a_k q^{k-1}$ слиједи да је

$$a_1 = \beta_1 - q\beta_2, \beta_2 = a_2 + \cdots + \alpha_k q^{k-2} = [\frac{\beta_1}{q}].$$

Понављајући овај поступак добија се

$$a_j = \beta_j - q\beta_{j+1}, \quad \beta_j = a_j + \cdots + \alpha_k q^{k-j} = [\frac{\beta_{j-1}}{q}], \quad j = 2, \dots, k-1.$$

На крају, имамо да је $a_k = \beta_k$ и $\beta_{k+1} = 0$. ■

Примјер 1. Нека је $\alpha = (a_k \dots a_0)_q$ запис цијелог броја α у стандардном систему са основом $q > 1$, $q \in \mathbf{N}$. Тада важе сљедећа тврђења:

а) Ако је $q = mp$, $m, p \in \mathbf{N}$, тада је α дјељив са p ако и само ако је $a_0 \in \{ip : i = 0, 1, \dots, (k-1)p\}$.

б) Ако је p дјелилац броја $q-1$, тада је α дјељиво са p ако и само ако је збир цифара броја α (записаног у систему са основом q) дјељив са p.

в) Број α је дјељив са $q+1$ ако и само ако је разлика збира цифара броја α (записаног у систему са основом q) на парним мјестима и збира цифара на непарним мјестима дјељива са $(11)_q$.

Ако је $q = 10$, тада добијамо критеријуме дјељивости са $2, 5, 3, 9, 11$.

У систему са основом $q > 1$, $q \in \mathbf{N}$, негативни цио број x се записује тако што се испред записа броја $|x|$ постави знак „$-$“.

Најчешће коришћени позициони систем је систем са основом десет. У рачунарству се интензивно користи бинарни систем тј. систем са основом два и скупом цифара $D = \{0, 1\}$. У основној варијанти или уз неке модификације, за записивање реалних бројева користи се и стандардни систем са основом 16.

Почетком XIX вијека почињу се разматрати и системи са негативним цифрама и негативним основама. На примјер, Коши, имајући у виду систем са основом 10 и скупом цифара $\{-4, -3, \dots, 0, 1, \dots, 5\}$, говори како је у овом систему довољно знати таблицу множења до 5×5, односно, он указује на предности овог система над стандардним декадним системом.

Примјер 2. (*Симетрични тернарни систем.*) Симетрични тернарни систем је систем са основом $q = 3$ и скупом цифара $D = \{-1, 0, 1\}$. Овај систем је први пут описан 1840. у једном чланку француског математичара Леона Лалана.

У њему се, на јединствен начин, могу записати сви цијели бројеви, дакле и негативни, а да се испред не ставља знак минус. При томе је

$$\alpha = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{(3,D)},$$

ако и само ако је

$$a_j = \beta_j - 3\beta_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

гдје је $\beta_0 = \alpha$, $\beta_j = \lfloor \dfrac{\beta_{j-1}}{3} \rceil$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\beta_{k+1} = \lfloor \dfrac{\beta_k}{3} \rceil = 0$, пр чему је са $\lfloor x \rceil$ означен цио број најближи броју x. Докажимо ово тврђење.

На основу релације $|x - \lfloor x \rceil| \le \frac{1}{2}$ имамо да је $|3\lfloor \frac{\beta_j}{3} \rceil - \beta_j| \le \frac{3}{2}$, одакле слиједи:

$$|a_j| = |\beta_j - 3\beta_{j+1}| = |\beta_j - 3\lfloor \frac{\beta_j}{3} \rceil| \le \frac{3}{2}.$$

Како је a_j цио број то $a_j \in \{-1, 0, 1\}$ за свако $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Множећи једнакост $a_j = \beta_j - 3\beta_{j+1}$ са 3^j, $j = 0, 1, 2, \dots, k$, сабирајући добијене једнакости и узимајући у обзир да је $\beta_0 = \alpha$, имамо

$$a_0 + a_1 \cdot 3 + \cdots + a_k \cdot 3^k = \alpha,$$

односно $\alpha = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{(3,D)}$.

Обрнуто, нека је

$$\alpha = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{(3,D)} = a_0 + 3a_1 + \cdots + 3^k a_k, \quad a_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 0, 1, \dots k,$$

и $\beta_0 = \alpha$. Тада је $\beta_0 = a_0 + 3\beta_1$, гдје је $\beta_1 = a_1 + \cdots + 3_{k-1} a_k$. Како је $|a_0| \le 1$, то је $|\beta_0 - 3\beta_1| \le 1$, одакле слиједи да је $|\beta_1 - \frac{\beta_0}{3}| \le \frac{1}{3}$, односно $\beta_1 = \lfloor \frac{\beta_0}{3} \rceil$. Слично, из једнакости

$$\beta_1 = a_1 + \cdots + 3^{k-1} a_k,$$

слиједи да је $a_1 = \beta_1 - 3\beta_2$, $\beta_2 = a_2 + \cdots + 3^{k-2} a_k = \lfloor \frac{\beta_1}{3} \rceil$. Понављајући овај поступак добијамо да је

$$a_j = \beta_j - 3\beta_{j+1}, \quad \beta_j = a_j + \cdots + 3^{k-j} a_k = \lfloor \frac{\beta_{j-1}}{3} \rceil, \quad j = 2, \dots, k-2.$$

На крају, имамо да је $\beta_k = a_k$ и $\beta_{k+1} = 0$.

Уобичајено да се у симетричном тернарном систему цифра -1 записује као $\bar{1}$. Интересантно је да се тада прелаз са записа броја α на запис њему супротног броја $-\alpha$ састоји у узајамној замјени цифара 1 и $\bar{1}$. При томе се знак броја α одређује првом цифром у његовом запису: ако је она једнака 1 број α је позитиван а ако је једнака $\bar{1}$ он је негативан.

О тернарном систему се, послије Лалановог рада, поново размишљало 1945–1946. Због његове симетричности, једноставне аритметике и релативно просте реализације, овај систем је, паралелно са бинарним системом, разматран као један од могућих којим би се у рачунарској аритметици замијенио систем са основом 10. У овом систему треба око 63% позиција потребних за записивање истог броја у бинарном систему.

У вези са конструкцијом рачунара, 50-тих година овог вијека, појавила се идеја записивања бројева у систему са негативном основом. Наводимо један примјер таквог система.

Примјер 3. *(Нега-бинарни систем).* У негабинарном систему је основа једнака $q = -2$ а скуп цифара је $D = \{0, 1\}$. И у овом систему се, на јединствен начин, могу записати сви цијели бројеви, и позитивни и негативни! Слично као у примјеру 2 и у теореми 1, доказује се да је

$$\alpha = a_0 + a_1(-2) + a_2 \cdot (-2)^2 + \cdots a_k(-2)^k = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{-2}$$

ако и само ако је $a_j = \beta_j + 2\beta_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, k$, гдје је $\beta_0 = \alpha$,

$$\beta_j = \begin{cases} [\frac{\beta_{j-1}+1}{-2}], & \text{ако је } \beta_{j-1} < 0, \\ [\frac{\beta_{j-1}}{-2}], & \text{ако је } \beta_{j-1} \ge 0, \end{cases}$$

и $\beta_{k+1} = 0$.

Знак броја у негабинарном систему се одређује бројем његових цифара: број је негативан ако и само ако има паран број цифара.

Примјер 4. У симетричном тернарном систему бројеви се упоређују лексикографски: упоређују се прве (с лијева на десно) цифре које се разликују.

И у негабинарном систему упоређивање се врши помоћу првих цифара које су различите, али на мало другачији начин. Претпоставимо да је $\alpha = (a_k \dots a_1 a_0)_{-2}$ и $\beta = (b_l \dots b_1 b_0)_{-2} \neq \alpha$. Претпоставимо да је $k \leq l$ и поставимо $b_i = 0$ за $i \in \{l+1, \dots, k\}$. Нека је $m \in \mathbf{N}$ највећи индекс из скупа $\{0, 1, \dots, k\}$ за који је $a_m \neq b_m$. Ако је индекс m паран и $0 = a_m < b_m = 1$ тада је $\alpha < \beta$. Ако је индекс m непаран тада је $0 = a_m < b_m = 1$ тада је $\alpha > \beta$.

Задатак 1. а) Извести правила дјељивости са $2, 3$ и 4 у симетричном тернарном и негабинарном систему.

б) Написати алгоритам за сабирање у симетричном тернарном систему.

в) Написати алгоритам за сабирање бројева записаних у негабинарном систему.

Вратимо се поново општим питањима. Претходна разматрања указују да се и основа и скуп цифара система могу бирати на различите начине. То наравно не значи да, за фиксирану основу q, скуп цифара може бити сасвим произвољан. Сљедећа кратка анализа указује да у систему (q, D) *скуп D мора садржати потпун систем остатака по модулу $|q|$.*

Претпоставимо да се сваки цио број може записати у систему (q, D), $q \in \mathbf{Z}$, $|q| > 1$, гдје је $D \subseteq \mathbf{Z}$. Ако је

$$\alpha = a_0 + a_1 q + \dots + a_k q^k = (a_k \dots a_1 a_0)_{(q,D)},$$

тада бројеви α и a_0 морају дати исти остатак при дијељењу са $|q|$. Како a_0 може бити произвољан елемент скупа D, то скуп D мора садржати потпун систем остатака по модулу $|q|$.

Симетрични тернарни систем и негабинарни систем су специјални случајеви система које описује сљедећа теорема.

Теорема 2. *Нека је q цио број, $|q| > 1$и нека се скуп D састоји од $|q|$ узастопних цијелих бројева укључујући нулу. Ако је испуњен бар један од следећа два услова:*

а) D садржи бар један позитиван и бар један негативан број;

б) q је негативан број,

тада се у систему (q, D) сваки цио број може записати на јединствен начин.

Доказ. Нека је α произвољан цио број и $D = \{-k, \dots, 0, \dots, l\}$, $l + k = |q| - 1$, $l, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ако подијелимо број α са $|q|$, остатак r ће припасти скупу $R = \{0, 1, \dots, |q| - 1\}$. То значи да важи једнакост

$$\alpha = \beta|q| + r, \quad r \in \mathbf{R}.$$

Ако је $r > l$, тада је $r = |q| - s$, при чему је $-s > -k$, односно $-s \in D$. Слично, ако је $r < -k$, тада је $r = -|q| + s, s < l$. Тако добијамо да је

$$\alpha = q\gamma + c, \quad c \in D.$$

Ако би постојало још једно такво разлагање $\alpha = q\gamma' + c'$, $c' \in D$, $\gamma' \in \mathbf{Z}$, тада бисмо имали да је разлика $c - c'$ дјељива са q, што је могуће само ако је $c = c'$, јер је максимална разлика између бројева из скупа D једнака $|q| - 1$. Одавде слиједи и да је $\gamma = \gamma'$.

Анализирајмо кратко случај $|\alpha| \leq 1$, тј. $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$. Сваки од система (q, D) из формулације теореме садржи цифру 0, којом се записује број $\alpha = 0$.

Ако скуп D садржи бар један позитиван и бар један негативан број, тада $-1, 1 \in D$, па се у том случају бројеви $\alpha = -1$ и $\alpha = 1$ записују са по једном цифром.

Нека је q негативан цио број, $q < -1$, $D = \{0, 1, \ldots, -q-1\}$ и $p = -q-1 \in D$ највећа цифра. Број $\alpha = 1 \in D$ се у овом систему записује цифром 1. Даље је

$$-1 = (-q-1) + q = (1p)_{(q,D)},$$

односно број -1 се записује са двије цифре.

Ако је q негативан цио број, $q < -1$, $D = \{0, -1, \ldots, -q+1\}$, $p = -q+1$, тада се број $\alpha = -1$ у овом систему записује цифром -1, а из релације $1 = -q + 1 + q$ слиједи да се број $\alpha = 1$ у истом систему записује као $(1p)_{(q,D)}$.

Из разматрања на почетку доказа слиједи да је сваки од ових записа јединствен.

Претпоставимо сада да је α цио број, $|\alpha| > 1$. Нека је $D = \{-k, \ldots, 0, \ldots, l\}$, $l + k = |q| - 1$, $l, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $\beta_0 = \alpha$. Према анализи са почетка доказа постоји тачно један број $a_0 \in D$ и тачно један цио број β_1 тако да је

$$\beta_0 = q\beta_1 + a_0, a_0 \in D.$$

За број β_1 тада важи:

$$|\beta_1| = |\frac{\beta_0 - a_0}{q}| \leq |\frac{\beta_0}{q}| + |\frac{a_0}{q}| < |\frac{\beta_0}{q}| + 1 < |\beta_0|.$$

Понављајући поступак са бројем β_1 добијамо да постоји тачно један број $a_1 \in D$ и тачно један цио број β_2 тако да је $\beta_1 = \beta_2 q + a_1$. При томе је $|\beta_2| < |\beta_1|$. Поступак се продужава све док се не дође до броја β_l за који је $|\beta_l| \leq 1$. Ако је $\beta_l = 0$, тада се поступак завршава одређивањем цифре $a_{l-1} \in D$, при чему важи: $\beta_{l-1} = a_{l-1}$. При томе је $k = l - 1$.

Нека је $\beta_l = 1$ или $\beta_l = -1$. Тада треба разликовати неколико случајева.

а) Ако скуп D садржи бар један позитиван и бар један негативан број, тада $1, -1 \in D$, па постављамо $k = l$ и $a_k = \beta_k$.

б) Слично, ако је $q < -1$, $q \in \mathbf{Z}$, $D = \{0, 1, \ldots, -q-1\}$, $\beta_l = 1$ или ако је $q < -1$, $q \in \mathbf{Z}$, $D = \{0, -1, \cdots, q-1\}$, тада постављамо $k = l$, $a_k = \beta_k$.

в) Ако је

$$q < -1, \quad q \in \mathbf{Z}, \quad D = \{0, 1, \ldots, -q-1\}, \quad \beta_l = -1,$$

тада, према анализи из дијела доказа о запису броја $\alpha \in \{-1, 1\}$ важи: $\beta_l = -q - 1 + \beta_{l+1} q$, гдје је $\beta_{l+1} = 1$. Тада постављамо

$$k = l + 1, \quad a_l = a_{k-1} = p, \; \beta_k = 1, \; a_k = 1,$$

гдје је $p = -q - 1$ највећа цифра.

г) Ако је $q < -1$, $q \in \mathbf{Z}$, $D = \{0, -1, \dots, q-1\}$, и $\beta_l = 1$, тада, опет према анализи из дијела доказа који се односи на запис бројева -1 и 1 слиједи да је $\beta_l = q - 1 + \beta_{l+1} q$, гдје је $\beta_{l+1} = -1$. Тада постављамо

$$k = l + 1, \quad a_l = a_{k-1} = p, \ \beta_k = -1, \ a_k = \beta_k,$$

гдје је $p = q - 1$ највећа по апсолутној вриједности цифра система.

У свим варијантама важе сљедеће једнакости:

$$\beta_j = \beta_{j+1} q + a_j, \qquad j = 0, 1, \dots, k,$$

при чему је $\beta_{k+1} = 0$. Множећи ове једнакости са q^j, $j = 0, 1, \dots, k$, сабирајући их, узимајући при томе у обзир да је $\beta_0 = \alpha, \beta_{k+1} = 0$, имамо:

$$\alpha = a_0 + a_1 q + \cdots a_k q^k = (a_k a_{k-1} \dots a_0)_{(q,D)}. \quad \blacksquare$$

2. Записивање реалних бројева

У претходној тачки посматрали смо системе (q, D) у којима се цијели бројеви записују на јединствен начин. Ти системи се могу прилагодити и за записивање реалних бројева. Ако за реалан број x важи

$$x = a_k q^k + \cdots + a_1 q + a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{-i}}{q^i}, \quad a_i \in D, \ i = k, k-1, \dots, 0, -1, -2, \dots,$$

тада се пише

$$x = (a_k \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_{(q,D)}$$

и каже да је број x записан у систему (q, D).

Тачка између a_0 и a_{-1} која раздваја цијели и разломљени дио броја x се назива децималном тачком. Цифре $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ су децимале броја x.

У оваквим ознакама умјесто индекса (q, D) често се пише индекс q, или се и он потпуно изоставља.

Записивање реалних бројева у стандардним системима

У стандардном систему са основом $q > 1$ и скупом цифара

$$D = \{0, 1, \dots, q-1\}$$

може се записати сваки ненегативан цио број. Ако су $a_i, i = -1, -2, \dots$ цифре стандардног система са основом q тада је низ парцијалних сума

$$s_n = a_{-1} q^{-1} + \cdots + a_{-n} q^{-n}$$

реда $a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots$ монотоно растући и за свако $n \in \mathbf{N}$ је

$$s_n \le (q-1) q^{-1} + \cdots + (q-1) q^{-n} \le \frac{(q-1)(1-q^{-n})}{1-q^{-1}} < 1.$$

Дакле, низ (s_n) конвергира. Одавде слиједи да за свако $k \in \{0, 1, \dots\}$ и $a_i \in D$, $i = k, k-1, \dots, 0, -1, \dots$, ред

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \cdots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots,$$

конвергира ка неком броју $x \in \mathbf{R}$. То значи да је

$$\begin{aligned} x &= a_k q^k + \cdots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots \\ &= (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_q . \end{aligned}$$

Примијетимо да је $0.a_{-1} \cdots a_{-n} lll \ldots$, гдје је $l = q-1, a_{-n} < q-1$, запис неког броја x у систему са основом $q \in \mathbf{N}$, $q > 1$. Ред

$$\frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{q^n} + \frac{q-1}{q^{n+1}} + \frac{q-1}{q^{n+2}} + \frac{q-1}{q^{n+3}} + \cdots$$

конвергира ка броју

$$x = \frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q^2} + \cdots + \frac{a_{-n}+1}{q^n}.$$

То значи да се у систему са основом q, број

$$\alpha = 0.a_{-1} \ldots a_{-n} lll \ldots , a_{-n} \neq l,$$

који се завршава са бесконачно много највећих цифара $l = q-1$, може се писати и са коначно много цифара:

$$x = 0.b_{-1} b_{-2} \cdots b_{-(n-1)} b_{-n},$$

гдје је $b_i = a_i$, $i = -1, \ldots , -(n-1)$ и $b_{-n} = a_{-n} + 1$.

Дакле, неки реални бројеви се у стандардном систему (q, D) могу записати на два различита начина. Нас интересује одговор на питање: да ли сваки број има бар један запис у систему са основом q?

Теорема 3. *Сваки реалан број се може записати у систему са основом $q \in \mathbf{N}$, $q > 1$. При томе је $(0.a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n} \ldots)_q$ запис броја $\alpha \in [0,1)$ у систему са основом q који не завршава са бесконачно много цифара $l = q-1$, ако и само ако је за свако $n \in \mathbf{N}$*

$$a_{-n} = [q^n \alpha] - q[q^{n-1}\alpha], n = 1, 2, \ldots .$$

Доказ. За сваки реалан број $\beta > 0$ постоји тачно један број $\alpha \in [0,1)$ тако да је $\beta = [\beta] + \alpha$. На основу теореме 1 имамо да је

$$[\beta] = a_k q^k + \cdots + a_1 q + a_0 .$$

Према томе, за доказ првог дијела тврђења, довољно је доказати да сваки број $\alpha \in [0,1)$ има бар један запис у систему са основом q:

$$\alpha = a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots , a_i \in D$$

и тада ће бити

$$\begin{aligned} \beta &= a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \cdots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots \\ &= (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_q . \end{aligned}$$

Нека је, дакле, $\alpha \in [0,1)$ и нека низ (a_{-n}), $n \in \mathbf{N}$, задовољава услове теореме. Докажимо да ред $\dfrac{a_{-1}}{q} + \cdots + \dfrac{a_{-n}}{q^n} + \cdots$ конвергира ка α. Означимо са

$\sigma_n = \dfrac{a_{-1}}{q} + \cdots + \dfrac{a_{-n}}{q^n}$. Тада је

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{a_{-1}}{q} + \cdots + \frac{a_{-n}}{q^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{[q^i\alpha] - q[q^{i-1}\alpha]}{q^i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{[q^i\alpha]}{q^i} - \frac{[q^{i-1}\alpha]}{q^{i-1}}\right) = \frac{[q^n\alpha]}{q^n} - [\alpha] = \frac{[q^n\alpha]}{q^n}.\end{aligned}$$

Слиједи да је $\alpha - \sigma_n = \dfrac{1}{q^n}(q^n\alpha - [q^n\alpha])$. Пошто за свако $x \in R$ важи $0 \le x - [x] < 1$, то је

$$0 \le \alpha - \sigma_n < \frac{1}{q^n},$$

одакле слиједи да $\sigma_n \to \alpha$ када $n \to \infty$.

Докажимо да за свако $n \in \mathbf{N}$, $a_{-n} \in D = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ и да не постоји $n \in \mathbf{N}$ тако да је $a_{-k} = q - 1$ за свако $k > n$. Имамо да је $a_{-n} = [q^n\alpha] - q[q^{n-1}\alpha]$ цио број, при чему је

$$a_{-n} > q^n\alpha - 1 - q \cdot q^{n-1}\alpha = -1, \text{ и } a_{-n} < q^n\alpha - q(q^{n-1}\alpha - 1) = q^n\alpha - q^n\alpha + q = q.$$

Дакле, $a_{-n} \in D$ за свако $n \in \mathbf{N}$.

Претпоставимо да је за неко $n \in \mathbf{N}$, $a_{-k} = q - 1$ за свако $k > n$. Тада је за $k > n$

$$q^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{a_{-i}}{q^i} = q^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{q-1}{q^i} = 1.$$

Одавде слиједи да је

$$\begin{aligned}\beta = q^k\alpha &= q^k \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_{-i}}{q^i} = q^k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{-i}}{q^i} + q^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{a_{-i}}{q^i}\\ &= q^k(\frac{a_{-1}}{q} + \cdots + \frac{a_{-(k-1)}}{q_{k-1}}) + 1 = a_{-1}q^{k-1} + \cdots + qa_{-(k-1)} + 1\end{aligned}$$

цио број за свако $k > n$ и даље, да је

$$q - 1 = a_{n+1} = [q^{n+1}\alpha] - q[q^n\alpha] = [q\beta] - q[\beta] = q\beta - q\beta = 0.$$

Контрадикција.

Доказали смо да је $(0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n}\ldots)_q$ запис броја α у систему са основом q и да тај запис не завршава са бесконачно много цифара $l = q - 1$.

Обрнуто, нека је

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{-i}}{q^i}, a_{-i} \in D, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Ако је $\sigma_n = \dfrac{a_{-1}}{q} + \cdots + \dfrac{a_{-n}}{q^n}$, тада је, према разматрањима на почетку доказа теореме, $0 \le \alpha - \sigma_n \le \frac{1}{q^n}$. Одавде даље слиједи да је $\sigma_n q^n \le q^n\alpha < q^n\sigma_{n+1}$.

Пошто је $q^n\sigma_n = a_{-1}q^{n-1} + \cdots + a_n$ цио број, то је $[q^n\alpha] = q^n\sigma_n$. Из $\sigma_n - \sigma_{n-1} = a_{-n}q^n$ слиједи да је $a_{-n} = q^n(\sigma_n - \sigma_{n-1})$, односно

$$a_{-n} = q^n\sigma_n - q[q^{n-1}\sigma_{n-1}] = [q^n\sigma_n] - q[q^{n-1}\alpha]. \quad \blacksquare$$

Нагласимо још једном да је запис реалног броја α у стандардном систему са фиксираном основом $q > 1$ јединствен, ако се изузму записи који завршавају са бесконачно много цифара $q - 1$.

У систему са основом $q > 1$, $q \in \mathbf{N}$, и стандардним скупом цифара $D = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, могу се записати само позитивни бројеви. Негативан реалан број x се записује тако што се испред записа броја $|x|$ стави знак $-$.

Записивање реалних бројева у нестандардним системима

У теореми 2 се описују двије класе система (q, D) у којима се сваки цио број записује на јединствен начин. Прва од тих класа обухвата симетрични тернарни систем а друга негабинарни систем.

У сљедећа два примјера и двије теореме биће доказано да се у таквим системима може записати и сваки реалан број.

Примјер 5. Нека је $q > 1$, $D = \{-l, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$, гдје је $k + l = q - 1$, $k, l > 0$. Ако је $\alpha = (0.a_{-1}a_{-2}\ldots)_q$, тада је

$$\alpha \leq \frac{k}{q} + \frac{k}{q^2} + \cdots + \frac{k}{q^n} + \cdots = \frac{k}{q-1},$$
$$\alpha \geq -\frac{l}{q} - \frac{l}{q^2} - \cdots - \frac{l}{q^n} - \cdots = -\frac{l}{q-1}.$$

Теорема 4. *Ако је q природан број већи од један и*

$$D = \{-l, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\},$$

гдје је $k + l = q - 1$, тада се сваки реалан број може записати у систему (q, D).

Доказ. Уведимо ознаке: $a = \dfrac{-l}{q-1}$, $b = \dfrac{k}{q-1}$. Како је интервал (a, b) дужине један, то за произвољан реалан број β постоји тачно један цијели број n и тачно једно $\alpha \in [a, b)$ тако да је $\beta = n + \alpha$. На тај начин је дефинисана функција $f(\beta) = n$. Посматрајмо низ

$$a_{-n} = f(q^n\alpha) - qf(q^{n-1}\alpha), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Користећи неједнакост $\beta - b < f(\beta) \leq \beta - a$ добијамо да је

$$a_{-n} < q^n\alpha - a - q(q^{n-1}\alpha - b) = bq - a = \frac{kq+l}{q-1} = k + \frac{k+l}{q-1} = k + 1.$$

Како је a_{-n} цио број, то је $a_{-n} \leq k$. Слично је $a_{-n} \geq -l$. Дакле, $a_{-n} \in D$ за свако $n \in \mathbf{N}$. При томе је

$$\frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{q^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(q^i\alpha) - qf(q^{i-1}\alpha)}{q^i}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{f(q^i\alpha)}{q^i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{f(q^{i-1}\alpha)}{q^{i-1}} = \frac{f(q^k\alpha)}{q^k}.$$

Како је

$$\frac{q^k\alpha - b}{q^k} < \frac{f(q^k\alpha)}{q^k} \le \frac{q^k\alpha - a}{q^k},$$

то $\frac{f(q^k\alpha)}{q^k}$ конвергира ка α када $k \to \infty$. Слиједи да је

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{-i}}{q^i} = (0.a_{-1}a_{-2}\dots)_{(q,D)}.$$

Како се цио број $f(\beta)$ може (и то на јединствен начин) записати у систему (q, D) (в. теорему 2), тј. како је $f(\beta) = (a_k \dots a_1 a_0)_{(q,D)}$, то је

$$\beta = (a_k \dots a_1 a_0.a_{-1}a_{-2}\dots)_{(q,D)}. \quad \blacksquare$$

Примијетимио да је претходном теоремом обухваћен тернарни симетрични систем.

Задатак 2. Утврдити који реални бројеви имају два различита записа у систему (q, D), гдје је $q > 1$, $q \in \mathbf{N}$ и $D = \{-l, \dots, 0, \dots, k\}$.

Примјер 6. Нека је $q < -1$, $q \in \mathbf{Z}$, $D = \{-l, \dots, 0, \dots, k\}$, гдје су l и k ненегативни цијели бројеви чији је збир једнак $|q| - 1$.

Ако је $\alpha = (0.a_{-1}a_{-2}\dots)_{(q,D)}$, тада је

$$\begin{aligned}
\alpha &\le -\frac{p}{q} + \frac{k}{q^2} - \frac{l}{q^3} + \frac{k}{q^4} + \dots = \left(\frac{-l}{q} + \frac{k}{q^2}\right)\frac{q^2}{q^2-1} = \frac{k - lq}{q^2 - 1},\\
\alpha &\ge \frac{k}{q} - \frac{l}{q^2} + \frac{k}{q^3} - \frac{l}{q^4} + \dots = \left(\frac{k}{q} - \frac{l}{q^2}\right)\frac{q^2}{q^2-1} = \frac{kq - l}{q^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Користећи претходне оцјене, слично теореми 4, доказује се сљедеће тврђење:

Теорема 5. *Ако је q цио број, $q < -1$ и $D = \{-l, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$, гдје је $k + l = |q| - 1$, тада се сваки реалан број може записати у систему (q, D).*

3. Примјери из математичке анализе

Записи реалних бројева у различитим системима се могу користити за доказивање разних тврђења. Ево неколико примјера.

Примјер 7. Један од доказа тврђења да је скуп реалних бројева непребројив заснива се на запису реалних бројева у систему са основом 10. Наравно, умјесто децималног записа може се користити запис са било којом другом основом. Рецимо, ако се у систему са основом три не дозволе записи који завршавају са бесконачно много двојки, тада се сегмент $[0, 1]$ може описати као скуп бројева који се у овом систему могу на јединствен начин записати у облику $(0.a_1a_2\dots)_3$, гдје је $a_i \in \{0, 1, 2\}$. Ако би скуп $[0, 1]$ био пребројив, тада би тај скуп могли записати као низ

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\dots,\\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\dots,\\ &\dots\\ x_k &= 0.a_{k1}a_{k2}\dots a_{kn}\dots,\\ &\dots \end{aligned}$$

Међутим, број $x = 0.a_1a_2\dots a_n\dots$, гдје је

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{ако је } a_{ii} \neq 0,\\ 1, & \text{ако је } a_{ii} = 0 \end{cases}$$

различит је од сваког члана из претходног низа (јер се од члана x_i разликује на i-тој позицији) а припада сегменту $[0,1]$.

Примјер 8. Сваки подскуп A скупа реалних бројева који је ограничен са горње стране има супремум. И за доказ ове чињенице могуће је користити запис бројева у неком систему са фиксираном основом. При томе је погодније користити записе у оном систему у коме се поредак бројева утврђује лексикографски. Такав је, између осталих, тернарни симетрични систем.

За свако $i \in \mathbf{Z}$ уочимо скуп бројева $A_i \subseteq A$ који у симетричном тернарном запису на i-тој позицији имају цифру различиту од нуле. Због ограничености скупа A постоји највећи индекс $k \in \mathbf{Z}$ такав да је $A_k \neq \emptyset$. Са Z_k означимо скуп свих цифара бројева из A које стоје на k-тој позицији. Тада је $Z_k \subseteq \{\bar{1}, 0, 1\}$. Нека је $b_k = \max Z_k$ и B_k скуп свих бројева из A чија је цифра на k-тој позицији једнака b_k. Даље, са Z_{k-1} означимо скуп свих цифара бројева из скупа B_k које стоје на $(k-1)$-ој позицији. Поставимо $b_{k-1} = \max Z_{k-1}$ и са B_{k-1} означимо скуп бројева из B_k код којих је цифра на $(k-1)$-ој позицији једнака b_{k-1}. Продужавајући поступак добијамо број $\beta = \sum_{-\infty}^{i=k} b_i 3^i$. Тада је $\beta = \sup A$. Заиста, ако је $x = x_s\dots x_1x_0.x_{-1}\dots x_{-n}\dots \in A$ елемент скупа A различит од β, тада је $x_l < b_l$ за неко $i \leq k$. При томе $x \in B_{l-1} \subseteq A$, па је $x < \beta$. Претпоставимо сада да је $\alpha < \beta$, гдје је $\alpha = a_m\dots a_0.a_{-1}\dots a_{-n}\dots$ и нека је $l \in \mathbf{Z}$ највећи индекс за који је $a_l < b_l$. Тада број x чији запис почиње са $b_k \dots b_l$ а даље наставља са неким од бројева из скупа A_l припада скупу A а већи је α.

Задатак 3. Доказати да је скуп разломака чији је запис у било ком систему са основом q коначан, густ у $\mathbf{R}$.

Задатак 4. Нека је $q > 1$ и $D = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Да ли је скуп свих бројева $x \in (0,1)$ који у запису у систему (q, D) садрже све цифре густ у $(0,1)$?

Примјер 9. Функцију f дефинишимо на сљедећи начин: ако је x број записан у систему са основом p, тада је $f(x)$ вриједност која се добија када се број чита у систему са основом q $(p \leq q)$. Израчунаћемо $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Нека је за $x \in [0,1]$, $x = \sum_1^\infty \frac{a_m}{p^m}$. Изузев у неким рационалним бројевима $a_m(x)$ је добро дефинисано. Тада је $a_m(x)$ функција типа степеница и

$$\int_0^1 a_m(x)\,dx = \frac{0 + 1 + 2 + \dots + (p-1)}{p} = \frac{(p-1)}{2}.$$

Али $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{a_m(x)}{q^m}$, па је

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{q}\int_0^1 a_m(x)\,dx=\frac{p-1}{2q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{q^m}=\frac{p-1}{2(q-1)}.$$

Примјер 10. Нека је σ пермутација цифара $0,1,\dots,9$ и $f\colon[0,1)\to[0,1]$, $f(0.a_1\dots a_n\dots)=0.\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\dots$.

Испитаћемо у којим је тачкама функција f непрекидна, у којим диференцијабилна, доказати да је интеграбилна на $[0,1]$ и израчунати $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Нека је $a=0.a_1\dots a_n\dots$. Нека је $\epsilon>0$. Тада постоји $m\in\mathbf{N}$ тако да је $10^{-m}<\epsilon$. За свако x које задовољава услов $0.a_1\dots a_m\le x<0.a_1\dots a_m999\dots$ вриједности $f(x)$ и $f(a)$ се не разликују на првих m децимала. Слиједи да је $|f(x)-f(a)|\le 10^{-m}$. Дакле, f је непрекидно сдесна у a. Ако $a=0.a_1\dots a_n\dots$ није број који се може записати са коначно много цифара, тада се за свако x које задовољава услов $0.a_1\dots a_m\le x<a=0.a_1\dots a_m a_{m+1}\dots$ вриједности $f(x)$ и $f(a)$ не разликују на првих m децимала. То значи да је $f(x)-f(a)<10^{-m}$ односно функција f је непрекидна и слијева у тачки a.

Потребно је још размотрити непрекидност слијева функције f у тачкама облика $a=0.a_1\dots a_m=0.a_1\dots a_{m-1}(a_m-1)99\dots$, гдје је $a_m\neq 0$. Примијетимо да је тада $f(a)=0.\sigma(a_1)\dots\sigma(a_m)\sigma(0)\sigma(0)\dots$. Посматрајмо низ $x_n=0.a_1\dots a_{m-1}(a_m-1)9\dots900\dots$ (са n цифара 9 иза цифре a_m-1) који, очигледно, конвергира ка a слијева. Тада је

$$f(x_n)=0.\sigma(a_1)\dots\sigma(a_{m-1})\sigma(9)\dots\sigma(9)\sigma(0)\sigma(0)\dots.$$

Низ $(f(x_n))$ конвергира ка $f(a)$ ако и само ако је испуњен један од сљедећа два услова:

а) $\sigma(9)=9$, $\sigma(0)=0$, $\sigma(a_m)=\sigma(a_m-1)-1$,

б) $\sigma(9)=0$, $\sigma(0)=9$, $\sigma(a_m)=\sigma(a_m-1)+1$,

Претпоставимо да је f диференцијабилна у некој тачки $a=0.a_1\dots a_n\dots$. Нека је d цифра која се у овом запису појављује бесконачно много пута и x_n број добијен замјеном n-тог појављивања цифре d цифром i. Тада $x_n\to a$ када $n\to\infty$ и $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$ је константа једнака $\frac{\sigma(i)-\sigma(d)}{i-d}$. Гранична вриједност количника мора бити иста за све i. Међу количницима један има именилац ±1, други ±5, а бројиоци су између -9 и 9. Дакле, сви количници морају бити 1 или сви морају бити -1, што даје $\sigma(i)=i$ или $\sigma(i)=9-i$ и $f(x)=x$ или $f(x)=1-x$. Дакле, f је или диференцијабилна у свим тачкама ($\sigma(i)=i$ или $\sigma(i)=9-i$), или није диференцијабилна ни у једној тачки.

Функција је интеграбилна, јер је непрекидна скоро свуда. Партицијом интервала на 10^n једнаких дјелова и коришћењем вриједности функције f у лијевим крајевима добијамо преуређену Риманову суму за $\int_0^1 x\,dx$. Слиједи да је $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

Њемачки математичар Кантор је у прошлом вијеку конструисао један скуп који је у развоју математике имао значајну улогу. Та конструкција се уобичајено описује у терминима записа реалних бројева у систему са основом три.

Примјер 11. Нека је K скуп бројева из одсјечка $[0,1]$ који се у систему са основом 3 могу записати без коришћења цифре 1 :

$$K = \{(0.a_1 \ldots a_k \ldots)_3 : a_k \in \{0,2\}, k \in \mathbf{N}\} = \{\, 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} : \epsilon_k \in \{0,1\}\,\}.$$

Скуп K може бити описан на сљедећи начин. Одсјечак $[0,1]$ се подијели на три једнака дијела и из њега се удаљи отворени средњи интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Тачка x припада унији преостала два дијела ако и само ако се x у систему са основом 3 може записати у облику $x = (0.a_1 a_2 \ldots)_3$ тако да цифра $a_1 \neq 1$.

Сваки од преостала два дијела подијелимо на три једнака интервала (дужина сваког од њих једнака је $\frac{1}{3^2}$) и из сваког од њих удаљимо отворени средњи интервал. Тачка x припада унији преостала четири дијела ако и само ако је x могуће записати у систему са основом 3 у облику $x = (0.a_1 a_2 \ldots)_3$ тако да цифре a_1 и a_2 нијесу једнаке 1. Продужавајући овај поступак добијамо Канторов скуп.

Примијетимо да је укупна дужина удаљених интервала једнака

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + \cdots + n\frac{1}{3^n} + \cdots = 1,$$

колика је и дужина одсјечка $[0,1]$.

Нека је

$$x = 2 \cdot (0.a_1 \ldots a_n \ldots)_3 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in K.$$

То значи да је $a_j = 0$ или $a_j = 1$. Пресликавање

$$f(x) = f(2 \cdot (0.a_1 a_2 \ldots)_3) = (0.a_1 \ldots a_n \ldots)_2$$

је бијекција скупова K и $[0,1]$, што значи да је K непребројив скуп.

Задатак 5. Нека је $q > 1$, $D = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ и $p \in D$. Доказати да је скуп $A \subseteq [0,1]$ бројева из $[0,1]$ који се у систему (q, D) могу записати без коришћења цифре $p \in D$ непребројив и нигдје густ.

Одавде специјално слиједи да је Канторов скуп K нигдје густ на $[0,1]$.

Задатак 6. Доказати да је $K + K = [0,2]$ и $K - K = [-1,1]$.

Примјер 12. У овом примјеру ћемо, коршћњем записа реалних бројева у тернарном и бинарном систему, доказати да се Кантопров скуп може непрекидно пресликати на одсјечак $[0,1]$.

Нека је K Канторов скуп и $f\colon K \to [0,1]$ функција дефинисана на сљедећи начин:

$$f((0.a_1 \ldots a_n \ldots)_3) = (0.c_1 \ldots c_n \ldots)_2,$$

гдје је $c_i = \frac{a_i}{2}$, $i \in \mathbf{N}$. Функција f је сирјекција. Докажимо да је f непрекидна на K. Ако је $x_0 = (0.a_1 \dots a_n \dots)_3 \in K$ и $x \in K$, при чему је $|x - x_0| < \frac{1}{3^n}$, тада је $x = (0.a_1 \dots a_n b_{n+1} \dots)_3$, гдје $a_i, b_i \in \{0, 2\}$. Одавде слиједи да је

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|a_{n+1} - b_{n+1}|}{2^{n+1}} + \frac{|a_{n+2} - b_{n+2}|}{2^{n+2}} + \dots \leq \frac{1}{2^n}.$$

Задатак 7. Нека је $f\colon K \to [0,1]$ функција из претходног примјера и $g\colon [0,1] \to K$ функција дефинисана на сљедећи начин:

$$g((0.c_1 \dots c_n \dots)_2) = (0.a_1 \dots a_n \dots)_3,$$

гдје је $a_i = 2c_i$, $i \in \mathbf{N}$. Доказати да је g бијекција али да није непрекидна на $[0,1]$. Доказати такође да је композиција $f \circ g\colon [0,1] \to [0,1]$ идентитет на $[0,1]$ а да $g \circ f\colon K \to K$ није идентитет на K.

Примјер 13. Канторова функција $\kappa\colon [0,1] \to [0,1]$ је једно непрекидно продужење функције f из претходног примјера са Канторовог скупа K на сегмент $[0,1]$. Она сегмент $[0,1]$ слика на $[0,1]$, иако је њен извод једнак нули скоро свуда на $[0,1]$.

Дакле,

$$\kappa((0.a_1 \dots a_n \dots)_3) = (0.c_1 \dots c_n \dots)_2,$$

гдје је $c_i = \frac{a_i}{2}$, $i \in \mathbf{N}$. Ако је $x = (0.a_1 \dots a_n \dots)_3 \in [0,1] \setminus K$, тада постоји најмањи индекс $k \in \mathbf{N}$ за који је $a_k = 1$. Тачка $x' = (0.a_1 \dots a_{k-1}2)_3 \in K$. Поставимо $\kappa(x) := (0.c_1 \dots c_{k-1})_2 + 2^{-k}$, гдје је $c_i = \frac{a_i}{2}$, $i = 1, \dots k-1$.

Јасно је да за свако $y \in [0,1]$ постоји $x \in K$ тако да је $\kappa(x) = y$. Функција κ је константна на сваком од интервала облика $((0.a_1 \dots a_n)_3, (0.a_1 \dots a_n b_{n+1})_3)$, гдје $a_i \in \{0,2\}$, $b_{n+1} = 1$. То су тачно они интервали који су удаљени из скупа $[0,1]$ при конструкцији Канторовог скупа и њихова укупна дужина је једнака 1.

Докажимо да је κ непрекидна функција. Ако $x_0 \notin K$, тада постоји интервал који садржи тачку x_0 на коме је функција κ константа, па дакле и непрекидна у x_0.

Нека $x_0 = (0.a_1 a_2 \dots a_n \dots)_3 \in K$ и нека је $|x - x_0| < \frac{1}{3^n}$. Ако $x \in K$ тада је, како је то доказано у претходном примјеру,

$$|\kappa(x) - \kappa(x_0)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ако је $x = (0.a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1} b_{n+2} \dots)_3 \in [0,1] \setminus K$, гдје $b_i \in \{0,1,2\}$, тада је

$$|\kappa(x) - \kappa(x_0)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{2^{n+2}} + \dots \leq \frac{1}{2^n}.$$

То значи да је функција κ непрекидна у x_0, односно κ је непрекидна на $[0,1]$.

Задатак 8. Доказати да је $\kappa(x) = \sup\{(0.c_1 \dots c_n)_2 : 0.(a_1) \dots (a_n))_3 \leq x, c_i \in \{0,1\}, a_i = 2c_i, i = 0, \dots n\}$.

Крива у $\mathbf{R}^2$ се дефинише као непрекидна слика неког одсјечка $[a,b]$. Пеано је конструисао криву која испуњава цијели квадрат. Прецизно, он је дефинисао непрекидно пресликавање F одсјечка $[0,1]$ у $\mathbf{R}^2$ тако да је $F([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$.

Овдје ћемо описати једно такво пресликавање у терминима записа бројева у тернарном и бинарном систему.

Примјер 14. Функције f и g ћемо прво дефинисати на Канторовом скупу K а затим ћемо их продужити на одсјечак $[0,1]$. Ако је $t=(0.a_1\dots a_n\dots)_3\in K$, $a_i\in\{0,2\}$ тачка Канторовог скупа, тада постављамо

$$f(t)=(0.c_1c_3\dots c_{2n-1}\dots)_2,\qquad g(t)=(0.c_2c_4\dots c_{2n}\dots)_2,$$

гдје је $c_i=\frac{a_i}{2}$, $i\in\mathbf{N}$.

Докажимо да су функције f и g непрекидне на K.

Нека је $t_0=(0.a_1\dots a_{2n}a_{2n+1}\dots)_3\in K$ и $t\in K$ тако да је $|t-t_0|<\frac{1}{3^{2n}}$. Тада је $t=(0.a_1\dots a_{2n}\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}\dots)_3\in K$, при чему $a_i,\alpha_i\in\{0,2\}$. Нека је $\gamma_i=\frac{\alpha_i}{2}$ и $c_i=\frac{a_i}{2}$. Тада је

$$\begin{aligned}|f(t)-f_(t_0)|&=|\frac{\gamma_{2n+1}-c_{2n+1}}{2^{n+1}}+\frac{\gamma_{2n+3}-c_{2n+3}}{2^{n+2}}+\cdots|\\&\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots=\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Слично је

$$|g(t)-g(t_0)|=|\frac{\gamma_{2n+2}-c_{2n+2}}{2^{n+1}}+\frac{\gamma_{2n+4}-c_{2n+4}}{2^{n+2}}+\cdots|\le\frac{1}{2^n}.$$

Одавде слиједи непрекидност функција f и g.

Скуп $K'=[0,1]\setminus K=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}I_i$ је пребројива унија дисјунктних интервала који су у конструкцији Канторовог скупа удаљени из одсјечка $[0,1]$. Функције f и g су дефинисане на крајевима сваког од интервала I_i. Линеарном интерполацијом продужићемо ове функције на $[0,1]$, нове функције ћемо такође означити са f и g. Дакле, ако се број $t\in[0,1]\setminus K$ запише у систему са основом три, тада су неке цифре у том запису једнаке 1. Претпоставимо да је $t=(0.a_1\dots a_nb_{n+1}\dots)_2$, гдје је $a_1,\dots a_n\in\{0,2\}$ а $b_{n+1}=1$. Тада $t\notin K$. Тачке $t_0=(0.a_1\dots a_n)_3$ и $t_1=(0.a_1\dots a_n22\dots)_3$ припадају скупу K и $t\in(t_0,t_1)$. Поставимо

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}(t-t_0)+f(t_0),\\g(t)&=\frac{g(t_1)-g(t_0)}{t_1-t_0}(t-t_0)+g(t_0),\quad t\in[t_0,t_1],\end{aligned}$$

Тада су функције $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ и $g\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ непрекидне на $[0,1]$ и при томе је $f(t)\in[0,1]$ и $g(t)\in[0,1]$ за свако $t\in K$. Одавде слиједи да пресликавање $F=(f,g)\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ непрекидно. Докажимо још да је F сирјекција.

Нека је $(x,y)\in A=[0,1]\times[0,1]$. Тада је

$$x=(0.c_1c_2\dots c_n\dots)_2,\ \ y=(0.d_1d_2\dots d_n\dots)_2,\ \ c_i,\ d_i\in\{0,1\}.$$

При томе $a_{2i-1}=2c_i$, $b_{2i}=2d_i\in\{0,2\}$ $(i\in N)$, па за тачку

$$t=(0.a_1b_2a_3b_4\dots a_{2n+1}b_{2n+2}\dots)_3\in K$$

важи $f(t)=x$, $g(t)=y$, односно $F(t)=(x,y)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Е. Кнут, *Умјетност рачунарског програмирања*, Том 2, Полунумерички алгоритми (енгл.) 1969, Масачусетс.

[2] К. А. Рибников, *Историја математике*, (рус.) 1994, Москва.

[3] А. Ја. Хинчин, *Елементи теорије бројева*, у књизи Енцикопедија елементарне математике, том I, Аритметика (рус.) 1950, Москва

[4] Б. Гелбаум, Ј. Олмстед, *Теореме и контрапримјери у математици*, (енгл.) 1990, Њујорк

[5] П. Билер, А. Витковски, *Проблеми из математичке анализе*, (енгл.) 1990, Њујорк

[6] П. Халмош, *Проблеми за математичаре, младе и старе*, 1991.

[7] М. Марјановић, *Математичка анализа* I, 1979.

[8] П. Обрадовић, *Записи реалних бројева за произвољну основу t (Систематски бројеви)*, Настава математике, XII (XXXIV), 1–2, 1985, 31–35.

[9] Ж. Дидоне, *Основи савремене анализе*, (енгл.) Њујорк, 1960.