др Владислав Милошевић

ПРИМЕНА КЛАСИЧНЕ ДЕФИНИЦИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ КОД ЕКСПЕРИМЕНАТА СА ПРЕБРОЈИВО МНОГО ИСХОДА

Класична или Лапласова дефиниција вероватноће заснива се на претпоставкама да простор E елементарних догађаја случајног експеримента има коначно много исхода и да сви исходи имају једнаке вероватноће, тј. да су сви исходи једнако могући или једнако вероватни. Број свих исхода експеримента назива се „број свих једнако могућих случајева“, а број исхода у којима се остварује посматрани догађај A назива се „број повољних случајева догађаја A“.

Класична дефиниција вероватноће. *Нека је $k(E)$ број свих једнако могућих случајева и $k(A)$ број повољних случајева догађаја A. Вероватноћа догађаја A је*

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(E)}.$$

Међутим, под одређеним условима и код експеримената са пребројиво много исхода вероватноће догађаја могу се наћи индиректно преко класичне дефиниције вероватноће.

Посматрајмо бесконачан низ бројева

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots \tag{1}$$

из кога се случајно бира један број. Случајно бирање броја из низа (1) представља експеримент са пребројиво много исхода. Како одредити вероватноћу догађаја A да случајно изабрани број из низа (1) има одређену особину α?

Посматрајмо N првих чланова низа (1),

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_N. \tag{2}$$

Овом коначном низу бројева придружићемо модел кутије, тако што ћемо бројеве a_1, a_2, … , a_N утиснути на куглице које ћемо ставити у кутију. Када кажемо да случајно бирамо број из низа (2), мислимо заправо да случајно извлачимо куглицу из кутије чији смо модел формирали. Нека је $k(N)$ број оних чланова низа (2) (куглица у кутији) који поседују особину α. Тада је према класичној дефиницији вероватноће $k(N)/N$ вероватноћа да случајно изабран број из низа

(2) поседује особину α, односно да случајно извучена куглица из кутије поседује особину α.

Помоћу вероватноће $k(N)/N$ одредићемо вероватноћу догађаја A да случајно изабран број из бесконачног низа бројева (1) има особину α.

Дефиниција. *Нека је $P(A)$ вероватноћа догађаја A да случајно изабран број из бесконачног низа бројева (1) има особину α. Ако међу првих N бројева (2) овога низа има $k(N)$ бројева који имају особину α, и ако количник $k(N)/N$ тежи одређеној граници кад $N \to \infty$, тада је*

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{k(N)}{N}. \tag{3}$$

Пример 1. Одредити вероватноћу да случајно изабран број буде: а) дељив са 2, б) дељив са 5.

Решење. Експеримент који се састоји у случајном бирању природног броја има пребројиво много исхода

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots \tag{4}$$

а) Вероватноћу догађаја

$$A = \text{„случајно изабран природан број је дељив са 2“}$$

одређујемо преко формуле (3), за чију је примену потребно одредити број $k(N)$ чланова коначног низа

$$1,\ 2,\ \ldots,\ N \tag{5}$$

који су дељиви са 2. Добијамо $k(N) = [N/2]$, где је са $[N/2]$ означен цео део броја $N/2$, па је вероватноћа догађаја A

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{[N/2]}{N}.$$

Пошто за сваки реалан број x важи $x = [x] + r$, $0 \leqslant r < 1$, добијамо даље

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{N}{2} - r}{N} = \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty} \frac{r}{N} = \frac{1}{2}.$$

б) Означимо догађај $B =$ „случајно изабран природан број је дељив са 5“. Пошто у низу (5) има $k(N) = [N/5]$ бројева дељивих са 5, добијамо

$$P(B) = \lim_{N\to\infty} \frac{[N/5]}{N} = \frac{1}{5} - \lim_{N\to\infty} \frac{r}{N} = \frac{1}{5}.$$

Пример 2. Одредити вероватноћу да се квадрат случајно изабраног природног броја завршава са 1.

Решење. Сви исходи случајног експеримента који се састоји у избору природног броја, образују низ (4). Треба одредити број $k(N)$ чланова низа (5) чији се квадрат завршава са 1.

Квадрат природног броја се завршава са 1 ако се тај број завршава са 1 или са 9. Одавде закључујемо да у сваком низу од 10 узастопних природних бројева постоје два броја чији се квадрат завршава са 1, па је

$$k(N) = \begin{cases} 2[N/10], & \text{ако се } N \text{ завршава са } 0, \\ 2[N/10]+1, & \text{ако се } N \text{ завршава са } 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \\ 2[N/10]+2, & \text{ако се } N \text{ завршава са } 9, \end{cases}$$

тј. $k(N) = 2[N/10] + \nu$, $\nu = 0, 1, 2$. Како је $N/10 = [N/10] + r$, $0 \leqslant r < 1$, према (3) добијамо вероватноћу догађаја A да се квадрат случајно изабраног броја завршава са 1:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{k(N)}{N} = \frac{1}{5} + \lim_{N\to\infty} \frac{\nu - 2r}{N} = \frac{1}{5}.$$

Пример 3 (*Чебишовљев проблем*). Одредити вероватноћу да два случајно изабрана природна броја буду узајамно проста.

Решење. Експеримент који се састоји у случајном бирању два природна броја из бесконачног низа (4) има пребројиво много исхода. Да бисмо одредили вероватноћу p да су два случајно изабрана броја из низа (4) узајамно проста, одредићемо вероватноћу p_N да су два случајно изабрана броја из низа (5) узајамно проста. Природно је узети да је $p = \lim\limits_{N\to\infty} p_N$.

Два природна броја су узајамно проста ако и само ако нису истовремено дељиви ниједним простим бројем 2, 3, 5, … . Вероватноћа да један случајно изабран број из низа (5) буде дељив са 2 износи $[N/2]/N$, па према формули за вероватноћу пресека два догађаја, израз

$$\frac{[N/2]}{N} \cdot \frac{[N/2]}{N}$$

представља вероватноћу да оба случајно изабрана броја из низа (5) буду дељива са 2. Према формули за вероватноћу супротног догађаја добијамо да је

$$1 - \frac{[N/2]}{N} \cdot \frac{[N/2]}{N}$$

вероватноћа да не буду оба броја броја дељива са 2. Аналогно се добијају вероватноће

$$1 - \frac{[N/3]}{N} \cdot \frac{[N/3]}{N}, \qquad 1 - \frac{[N/5]}{N} \cdot \frac{[N/5]}{N}, \qquad \ldots$$

да не буду оба случајно изабрана броја из низа (5) дељива са 3, 5, … . Према формули за вероватноћу пресека догађаја, добијамо вероватноћу да два случајно изабрана броја из низа (5) не буду истовремено дељива ни са једним простим бројем:

$$p_N = \left(1 - \frac{[N/2]}{N} \cdot \frac{[N/2]}{N}\right) \left(1 - \frac{[N/3]}{N} \cdot \frac{[N/3]}{N}\right) \left(1 - \frac{[N/5]}{N} \cdot \frac{[N/5]}{N}\right) \cdots ,$$

где на десној страни има коначно много чинилаца. Тада је $p = \lim_{N\to\infty} p_N$ вероватноћа да два случајно изабрана природна броја из низа (4) не буду истовремено дељива ни са једним простим бројем. Добијамо

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots .$$

Да бисмо израчунали производ на десној страни, поступићемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} \cdot \ldots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \end{aligned}$$

Познато је да је збир последњег реда $\pi^2/6$, па добијамо да је тражена вероватноћа

$$p = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}60792\ldots .$$

Чебишовљев проблем се јавља у литератури и у следећем еквивалентном облику: Одредити вероватноћу да се случајно изабрани разломак не може скратити.