НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1999, XLIV, 1–2, стр. 1–7

др Неда Бокан

МОЖЕТЕ ЛИ ЧУТИ ОБЛИК БУБЊА?

Циљ овог рада је да се истакне повезаност различитих математичких метода у проучавању геометрије неких површи и зависност геометрије од спектра Лапласовог оператора. Да бисмо овај циљ постигли представићемо методу једначине топлоте и садржај Сунадине теореме.

1. Лапласов оператор и веза с једначином топлоте

Да бисмо дефинисали Лапласов оператор уочимо симболички вектор

$$\nabla := \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

у Еуклидовој равни, или некој области у њој, где су (x, y) Декартове координате. Ако овај симболички вектор применимо на скаларну функцију $f = f(x, y)$, добијамо

$$\nabla f := \operatorname{grad} f.$$

Скаларни производ симболичког вектора и неког вектора $\overrightarrow{A} = (A_1, A_2)$ назива се дивергенција вектора $\overrightarrow{A}$, што записујемо у облику

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} := \operatorname{div} \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}.$$

Оператор Δ назива се Лапласов оператор или лапласијан и дефинише се једнакошћу

$$\Delta f := -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

У Декартовим правоуглим координатама у равни претходна релација се записује на следећи начин

$$\Delta f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Пошто се Лапласов оператор дефинише помоћу скаларног производа, јасно је да ће израз за Лапласов оператор бити знатно сложенији ако уместо

Краћа верзија пленарног предавања на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, Београд, 11. јануара 1999.

области у Еуклидовој равни и Декартовиx координата имамо неку другу површ и погодно изабран координатни систем. На пример, на сфери S^2 имамо координате (φ, θ) $(0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi)$, јер је параметризација сфере

$$x = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$y = \sin\varphi \cos\theta,$$
$$z = \cos\varphi.$$

Сл. 1

Један начин за разумевање овог оператора је једначина топлоте. Претпостављамо да све разматрамо на 2-димензионој површи са унутрашњим координатама (φ, θ). Ако $f_t(x)$ означава температуру у времену t и тачки x површи, и ако претпоставимо да топлота иде у најхладнијем правцу, тада $f_t(x)$ задовољава једначину

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \Delta f = 0. \tag{1.1}$$

Ако је f_0 функција таква да важи

$$\Delta(f_0) = \lambda f_0, \tag{1.2}$$

директним рачуном проверавамо да функција $f_t(x) = e^{-\lambda t} f_0$ задовољава једначину топлоте. Дакле, $f_t(x)$ описује топлотни талас с фрекценцијом $e^{-\lambda t}$. Број $\lambda \in \mathbf{R}$ називамо сопствена вредност, а f_0 сопствена функција Лапласовог оператора.

За компактне површи постоји пребројив скуп сопствених вредности λ_i (укључујући мултиплицитет) и њима одговарајућих сопствених функција f_λ и важи

$$0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \leqslant \infty.$$

Скуп $\{\lambda_i\}$ је спектар.

Ако неко разматра да звук задовољава сличну једначину овој једначини топлоте, тада се λ_i могу сматрати као звуци које емитује површ M, ако по M ударамо неким дрвеним штапом.

Овде је природно поставити питање: шта је геометријски смисао бројева λ, чија је егзистенција утврђена применом метода математичке анализе? Одговори на ово питање интензивно се дају у 20. веку. Прва половина века прошла је у нагађањима да сопствене вредности λ_i одређују геометрију површи M у потпуности, јер је немачки математичар Х. Вејл доказао 1911. да оне одређују површину површи M.

2. Зашто овакав наслов

Нека су Ω_1 и Ω_2 две равне области ограничене редом кривим Γ_1 и Γ_2. Размотримо проблеме сопствених вредности

$$\left.\begin{array}{r} \text{у } \Omega_1 \quad \Delta f + \lambda f = 0 \\ \text{са } f = 0 \text{ на } \Gamma_1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \text{у } \Omega_2 \quad \Delta g + \mu g = 0 \\ \text{са } g = 0 \text{ на } \Gamma_2 \end{array}\right\}.$$

Претпоставимо да је, за свако n, сопствена вредност λ_n у Ω_1 једнака сопственој вредности μ_n у Ω_2. Питање је: да ли су области Ω_1 и Ω_2 подударне у смислу еуклидске геометрије?

Сл. 2

М. Кацу је овај проблем поставио С. Бохнер 1956. године. Десетак година касније проблем је испричао професору Берсу, који је скоро одмах рекао: „Ви мислите, ако имате савршено чуло слуха, можете ли наћи облик бубња?“ Зато је М. Кац предавање које је нешто касније држао под окриљем Комитета за образовне медије Математичке асоцијације Америке, насловио „Can one hear a shape of a drum?“, што у преводу значи „Може ли се чути облик бубња?“ Многи предавачи и касније држе радо предавања из ове проблематике са истим насловом. Дакле, можемо мислити да „бубањ“ из наслова више личи на тамбурину (што је у ствари мембрана).

3. Метода једначине топлоте

Ова метода повезује решење једначине топлоте са спектром одговарајућег Лапласовог оператора. Тако се добија један ред који је асимптотски еквивалентан Тејлоровом реду чији коефицијенти зависе од геометрије површи M. Прецизније, нека је $H_t(x,y)$ фундаментално решење једначине топлоте. Будући да оно мора да задовољава одређене услове, доказује се да је оно јединствено. Опште решење $f_t(x)$, са почетним условом $f_0(x) = f$, добија се користећи формулу

$$f_t(x) = \int_M H_t(x,y) f(y)\, dy.$$

Траг фундаменталног решења задовољава релацију

$$\operatorname{tr}(H_t) = \int_M H(x,x)\, dx = \sum e^{-\lambda_i t},$$

када $t \downarrow 0$ и сем тога је

$$\sum e^{-\lambda_i t} \sim \sum a_n t^n,$$

при чему a_n зависе од геометрије површи M.

Ови резултати се користе за разматрање одговора на питање: колико је геометрија површи одређена њеним спектром?

4. Изоспектралност

Површи које имају исти спектар кажемо да су изоспектралне.

Проблем изоспектралности површи је поставио између осталих и холандски физичар Х. А. Лоренц. Наиме, на Универзитету у Гетингену (Немачка) постојао је фонд за награду за доказ чувене Фермаове теореме. Пошто доказ није дат за двеста година, средства су се користила и за предавања познатих научника. Тако је и Х. А. Лоренц гостовао 1910. године и одржао серију од пет предавања „Alte und neue Fragen der Physik“. У једном од предавања поставио је проблем у оквиру Јенсове теорије радијације, преведено на математички језик: број високих тонова између ν и $\nu + d\nu$ је независан од облика цеви оргуље (или ограде) и пропорционалан је запремини.

Међу слушаоцима је био и Х. Вејл, који је 1911. године доказао да је поменути број $N(\lambda)$ заиста пропорционалан запремини, тј.

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\,\lambda.$$

Као последицу овог резултата добијамо да изоспектралне површи имају исту површину.

Користећи теореме Харди-Литлвуд-Карамата-Тауберовог типа доказује се да важи и следећа процена

$$A(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n^2(\vec{r}) \sim \frac{\lambda}{2\pi}, \quad \lambda \to \infty,$$

за свако $\vec{r}$ у унутрашњости области Ω.

Нека је Λ мрежа генерисана тачкама (x_1, y_1) и (x_2, y_2) у равни $\mathbf{R}^2$,

$$\Lambda = \{\, m(x_1, y_1) + n(x_2, y_2) \mid m, n \in \mathbf{Z} \,\}.$$

Сл. 3

Тада је $T^2 = \mathbf{R}^2/\Lambda$ раван 2-димензиони торус. Ма која два равна 2-димензиона торуса, који су изоспектрални такође су и изометрични. Ова особина торуса следи из формуле

$$\operatorname{tr}(H_t^{T_2}) = \frac{\operatorname{area}(T^2)}{4\pi l} \tag{4.1}$$

и чињенице да је мрежа у $\mathbf{R}^2$ одређена њеном површином и дужинама. У другим димензијама то не важи. То је уочио Џ. Милнор (1964) и конструисао два 16-димензиона торуса T^{16} и T'^{16}, који су изоспектрални али нису изометрични.

5. Сунадина теорема

Кажемо да је M' наткривач простора M ако постоји пресликавање $\varphi\colon M' \to M$ које је у малој околини сваке тачке изометрија. Нека су $\pi_1(M)$ и $\pi_1(M')$ фундаменталне групе редом простора M и M'. Ако је $\pi_1(M')$ нормална подгрупа групе $\pi_1(M)$, тада група $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$ делује на M' као група изометрија.

Док се $\operatorname{tr}(H_t^{T_2})$ изражава преко бесконачне суме (4.1), за простор M, који у овом одељку разматрамо, имамо коначну суму, тј.

$$H_t^M(x,y) = \sum_{g\in G} H_t^{M'}(\bar{x}, g\bar{y}), \tag{5.1}$$

јер је G коначна група, тј.

$$\operatorname{tr}(H_t^M) = \sum_{[g]} \frac{\sharp([g])}{\sharp(G)} \int_{M'} H_t^{M'}(\bar{x}, g\bar{x})\, d\bar{x}, \tag{5.2}$$

где је $[g] = \{\, hgh^{-1} \mid h \in G \,\}$ и $\sharp$ број који се придружује групи G, односно класи $[g]$.

Нека су H_1 и H_2 подгрупе групе G које задовољавају услов

$$\sharp([g] \cap H_1) = \sharp([g] \cap H_2), \qquad \forall g \in G. \tag{5.3}$$

Користећи претходно истакнуте чињенице, јапански математичар Т. Сунада је 1985. године доказао следећу теорему.

Теорема. *Нека су G, H_1, H_2 групе које задовољавају услов (5.3) и M_0, M_1, M_2, M' задовољавају дијаграм наткривајућих простора као што следи*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "H_2"] \arrow[d, "H_1"'] & M_2 \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r] & M_0 \end{tikzcd}$$

тада су M_1 и M_2 изоспектралне површи. Ако су H_1, H_2 и конјуговане подгрупе групе G, тада су M_1 и M_2 такође изометричне.

Приметимо да испитивање изоспектралности површи налажењем сопствених вредности одговарајућих лапласијана је веома сложен задатак математичке анализе. Сунадина теорема даје критеријум за утврђивање изоспектралности у једној фамилији површи, па и њихове изометричности, користећи дејства коначних група и не примењујући методе математичке анализе.

6. Пример

Постоје бројни примери група које задовољавају услов (5.3). Овде наводимо само један пример таквих група и одговарајуће површи које су изоспектралне, али не и изометричне.

Уочимо скуп $\mathbf{Z}/8 \times (\mathbf{Z}/8)^*$ и уређене парове (a,b), $a = 1,3,5,7$ и $b \in \mathbf{Z}/8$, за које је множење дефинисано формулом $(a,b)\cdot(a',b') = (aa', a'b + b')$. Тада је група G семи-директни производ група $\mathbf{Z}/8$ и $(\mathbf{Z}/8)^*$, која има 32 елемента. Нека су $H_1 = \{(1,0);(3,0);(5,0);(7,0)\}$ и $H_2 = \{(1,0);(3,4);(5,4);(7,0)\}$. Лако се проверава да су H_1 и H_2 групе које задовољавају услов (5.3) и да H_1 није конјугована групи H_2 у G.

Важи следећа идентификација $G/H_1 = G/H_2 = \mathbf{Z}/8$, јер је $(a,b)\cdot(a,0) = (1,ab)$, $ab \in \mathbf{Z}/8$.

Размотримо сада фигуру на сл. 4.

Сл. 4

Направимо затим осам копија фигуре са сл. 4 и означимо их бројевима од 0 до 7. Затим их залепимо имајући у виду дејство генератора на овим косетима. Инструкције за лепљење су дате на сл. 5.

Сл. 5

Коначно поновимо овај поступак још једном, али сада користећи инструкције дате на сл. 6, да бисмо добили другу фигуру, која је изоспектрална првој.

Сл. 6

За читаоце који се интересују више за питања, која смо разматрали у овом раду, наводимо литературу у прилогу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Brooks, *Constructing Isospectral Manifolds*, Amer. Math. Monthly (1988), 823–839.

[2] P. Buser, *Isospectral Riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier, XXXVI (1986), 167–192.

[3] M. Kac, *Can one hear a shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 1–23.