др Весна Јевремовић

УСЛОВНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ. НЕЗАВИСНОСТ

Појам независности је веома важан у теорији вероватноће и у математичкој статистици. Исти термин се користи и у обичном животу, па се тим пре поставља питање тачног усвајања овог појма у теорији вероватноће. С друге стране, значај условних вероватноћа и Бајесове формуле произилази из широке области њихове примене. Стога су многобројни и разноврсни задаци у којима се среће независност догађаја и условне вероватноће. Поред мноштва задатака са разнобојним куглицама, који су уствари поједностављени модели неких реалних појава, има пуно задатака у вези израчунавања добитка у игри на срећу, у вези „ратних игара“ итд. Овде ће на одабраним примерима бити илустровани наведени појмови, а такође ће бити приказани неки карактеристични поступци и ситуације у којима се користе независност и условне вероватноће: од случајног кретања по правој и у равни, добијања одговора на провокативна питања у анкетама, до мешавина случајних променљивих.

Нека у једном експерименту посматрамо два случајна догађаја A и B. Ако је познато да се један од њих, на пример догађај B, остварио, треба одредити вероватноћу да ће се остварити и други.

Дефиниција 1. *Нека су A и B догађаји из истог простора вероватноћа и нека је $P(B) > 0$. Тада је условна вероватноћа догађаја A, ако се десио догађај B једнака:*

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

За условну вероватноћу $P(A/B)$ користи се и ознака $P_B(A)$.

Пример 1. *Условна вероватноћа и карте*

На случајан начин се бира једна карта из шпила од 52 карте. Ако је познато да је изабрана карта „херц“, одредити вероватноћу да је та карта „десетка“. Ако је познато да је изабрана карта „штих“ (у „таблићима“), одредити вероватноћу да је та карта „десетка“.

Решење. Нека је A догађај: случајно изабрана карта је „десетка“, а B догађај: случајно изабрана карта је „херц“. Треба одредити $P(A/B)$. Догађај AB означава да је изабрана „десетка херц“ и вероватноћа тог догађаја је $1/52$. Како је вероватноћа догађаја B једнака $13/52$, добијамо да је $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = 1/13$.

Ако је C догађај: случајно изабрана карта је „штих“, тада AC означава избор „десетке“, и има вероватноћу $4/52$, а догађај C има вероватноћу $20/52$, па је $P(A/C) = 1/5$.

Условне вероватноће случајних догађаја из једног простора вероватноћа, у односу на један догађај из тог простора, имају све особине вероватноће. Наиме, за сваки догађај A важи $P(A/B) \geqslant 0$, за сигуран догађај Ω важи $P(\Omega/B) = 1$, а за коначне или пребројиве уније дисјунктних догађаја важи $P[(\sum_j A_j)/B] = \sum_j P(A_j/B)$. Стога се закључује да за условне вероватноће важе и остале особине вероватноће. На пример, условна вероватноћа је монотона функција, тј.

$$(A_1 \subset A_2) \implies P(A_1/B) \leqslant P(A_2/B),$$

условна вероватноћа комплемента се рачуна по формули $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$, итд.

Сви догађаји наведени у горњим релацијама припадају истом простору вероватноћа.

Има, наравно, и формула специфичних за условне вероватноће. Једна таква формула је $P(E/F) = P(E/FG)P(G/F) + P(E/F\overline{G})P(\overline{G}/F)$, која важи за ма која три догађаја (уз услове $FG \neq \Phi$ и $F\overline{G} \neq \Phi$) и подсећа на пословицу: „Преко прече, наоколо ближе“.

Независност догађаја је један од важних појмова у теорији вероватноће, а самим тим и у математичкој статистици. Због тога, а и због чињенице да се појам независности у вероватноћи не мора поклопити са интуитивним схватањем независности, у уобичајеном смислу те речи, треба се придржавати следеће дефиниције.

Дефиниција 2. *Нека су догађаји A и B из истог простора вероватноћа. Ако важи $P(AB) = P(A)P(B)$, тада су догађаји A и B независни.*

На основу дефиниције условне вероватноће закључујемо да за независне догађаје A и B важи $P(A/B) = P(A)$, а такође и $P(B/A) = P(B)$. Свака од ових једнакости се може користити при дефинисању независности, с обзиром да је еквивалентна једнакости која се јавља у Дефиницији 2. Ако су догађаји A и B независни, тада информација о реализацији догађаја B не мења шансу појављивања догађаја A, али ако су догађаји зависни, тада је вероватноћа $P(A/B)$ различита од $P(A)$ и тада је могуће $P(A/B) > P(A)$ или $P(A/B) < P(A)$. У Примеру 1 догађаји A и B су независни, а догађаји A и C су зависни.

Напомињемо да се независност догађаја мора проверити по дефиницији, без обзира на интуитивно осећање „зависности“ или „независности“ догађаја.

Ако су догађаји независни, то не значи да су дисјунктни. Наиме, важи следеће: ако су догађаји A и B независни и бар један од њих немогућ догађај, онда су они дисјунктни. Ако су догађаји A и B дисјунктни, а ни један од њих није немогућ, тада су A и B зависни догађаји.

Пример 2. *Једна неједнакост и независност*

Нека су A и B два произвољна догађаја из истог поља догађаја и нека ни један од њих није немогућ догађај. Доказати да је

$$(P(AB))^2 + (P(\overline{A}B))^2 + (P(A\overline{B}))^2 + (P(\overline{AB}))^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Решење. Имамо да је $P(AB) + P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(\overline{AB}) = 1$. Стога, ако означимо $P(AB) = x + 1/4$, $P(\overline{A}B) = y + /4$, $P(A\overline{B}) = z + 1/4$, $P(\overline{AB}) = u + 1/4$, следи $x + y + z + u = 0$. Даље је

$$\begin{aligned}
(P(AB))^2 &+ (P(\overline{A}B))^2 + (P(A\overline{B}))^2 + (P(\overline{AB}))^2 \\
&= (x + 1/4)^2 + (y + 1/4)^2 + (z + 1/4)^2 + (u + 1/4)^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 1/4 \geqslant 1/4.
\end{aligned}$$

Једнакост се достиже за $x = y = z = u = 0$, а то уједно значи да постоје два независна догађаја A и B таква да је $P(A) = P(B) = 1/2$.

Ако посматрамо више од два догађаја, њихова *независност у укупности*, означава да је вероватноћа пресека било која два од тих догађаја једнака производу вероватноћа та два догађаја (што се назива независност у паровима), затим да је вероватноћа пресека било која три од тих догађаја једнака производу вероватноћа та три догађаја (што се назива независност у тројкама), итд. На пример, догађаји A, B и C су независни ако и само ако важе све следеће једнакости:

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$
$$\text{и} \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Ако треба испитати независност n догађаја, тада треба проверити $2^n - n - 1$ једнакости. Испитивање независности више догађаја илустроваћемо једним, у литератури често навођеним, примером.

Пример 3. *Независност више догађаја — шарена пирамида*

Правилна тространа пирамида има једну страну обојену белом бојом, једну страну обојену црвеном, једну страну обојену црном, а четврта страна је тробојна: бела, црвена и црна. Пирамида се баца и бележи се страна на коју пирамида пада (основа пирамиде). Испитати независност догађаја A: на основи има беле боје, B: на основи има црвене боје и C: на основи има црне боје.

Решење. Према начину на који је пирамида обојена закључујемо да је: $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4$ и да је $P(ABC) = 1/4$. Догађаји A, B и C су независни у паровима, али је $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, што значи да догађаји A, B и C нису независни у укупности.

Теорема. *Нека су догађаји A, B и C независни и нека је $B_1 = B$ или $B_1 = \overline{B}$, односно $C_1 = C$ или $C_1 = \overline{C}$. Тада су независни догађаји*

1° $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *и* $\overline{C}$, $\overline{C}$ *и* $\overline{B}$;

2° A *и* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *и* B, A *и* $\overline{C}$, $\overline{A}$ *и* C, B *и* $\overline{C}$, $\overline{B}$ *и* C;

3° A *и* $B_1 \cap C_1$, *као и* A *и* $B_1 \cup C_1$.

Тако, на пример, из особине 1° следи $P(\overline{A}\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$. Дата теорема, која повезује независност и операције са догађајима, може се уопштити на случај више догађаја. На пример, ако су A, B, C и D независни догађаји, тада су независни, између осталих, и догађаји B, $\overline{A} \cup C$ и D.

Пример 4. *Детерминанта са случајним елементима*

Елементи детерминанте $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ су једнаки 0 или 1, са вероватноћом $1/2$, и догађаји $A_j = \{a_j = 1\}$, $j = 1, 2, 3, 4$ су независни. Одредити вероватноћу да је $D > 0$.

Решење.

$$\begin{aligned} P(D > 0) &= P(a_1a_4 - a_2a_3 > 0) = P(a_1a_4 = 1, a_2a_3 = 0) \\ &= P((a_1 = 1 \wedge a_4 = 1), (a_2 = 0 \vee a_3 = 0)) = P(A_1A_4\overline{A}_2 \cup A_1A_4\overline{A}_3) \\ &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 3/16, \end{aligned}$$

где су коришћене ознаке $A = A_1A_4\overline{A}_2$, $B = A_1A_4\overline{A}_3$. Вероватноће тих догађаја се рачунају на основу претходне Теореме.

Нека су A_1, A_2, $\ldots$, A_n догађаји из истог простора вероватноћа и нека је пресек догађаја $A_1A_2\cdots A_k \neq \Phi$, за свако $k = 1, 2, \ldots, n-1$. (Довољно је претпоставити $A_1A_2\cdots A_{n-1} \neq \Phi$. Зашто?) Тада важи

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Ову једнакост доказујемо по дефиницији условних вероватноћа.

Пример 5. *Условне вероватноће — „ратне игре“*

У ваздушној бици учествују ловац и бомбардер. Прво ловац гађа бомбардера и обара га са вероватноћом 0,2. Ако бомбардер није оборен, узвраћа паљбу и обара ловца са вероватноћом 0,3. Ако ловац при томе није оборен, ближе је бомбардеру и обара га са вероватноћом 0,4. Одредити вероватноће догађаја $A = \{$оборен бомбардер$\}$, $B = \{$оборен ловац$\}$ и $C = \{$ни један од авиона није оборен$\}$.

Решење. Догађај A је унија дисјунктних догађаја

$$A_1 = \{\text{ловац обара бомбардера при првом гађању}\}$$
$$A_2 = \{\text{ловац обара бомбардера при другом гађању}\}.$$

Имамо $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, због $A_1 \cap A_2 = \Phi$. По услову задатка је $P(A_1) = 0{,}2$. Догађај A_2 можемо посматрати као пресек догађаја

$$D = \{\text{ловац не обара бомбардера при првом гађању}\}$$
$$E = \{\text{бомбардер не обара ловца при првом гађању}\}$$
$$F = \{\text{ловац обара бомбардера при другом гађању}\}$$

Како је $A_2 = DEF$, то је

$$P(A_2) = P(DEF) = P(D)P(E/D)P(F/DE) = (1-0{,}2)(1-0{,}3)0{,}4 = 0{,}224.$$

Вероватноћа догађаја A је $P(A) = 0{,}424$.

Догађај B можемо посматрати као пресек догађаја D и $\overline{E}$.

$$P(B) = P(D\overline{E}) = P(D)P(\overline{E}/D) = (1-0{,}2)0{,}3 = 0{,}24.$$

Како догађаји A, B и C чине потпун систем догађаја (дисјунктни су и њихова унија је сигуран догађај), то је

$$P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - (P(A_1) + P(A_2) + P(B)) = 0{,}336.$$

(Одредите вероватноћу догађаја C и непосредно).

Пример 6. *Проблем са кључевима*

Особа X има више кључева од којих само један отвара орман. Да би отворила орман, особа X испробава кључеве један за другим, не узимајући поново кључ за који установи да не отвара орман. Одредити вероватноћу да ће бити потребно k покушаја да се орман отвори.

Решење. Задатак можемо решити без примена условних вероватноћа. Наиме, вероватноћа да је тражени кључ на k-том месту је $(n-1)!/n! = 1/n$ и не зависи од k.

Решење које користи условне вероватноће добићемо ако посматрамо низ „неуспеха“: први кључ није отворио орман, други кључ није отворио орман, … , $(k-1)$-ви кључ није отворио орман, а k-ти јесте. Ако са A_k означимо догађај: орман је отворен кључем k, тада је тражена вероватноћа

$$\begin{aligned} P(&\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k) \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1}/\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-2})P(A_k/\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1}) \\ &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\cdot\frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Нека су $H_1, H_2, \ldots, H_n$ случајни догађаји који чине потпун систем догађаја и нека је A неки догађај из истог простора вероватноћа. Вероватноћа догађаја A се може израчунати по формули

$$(*) \qquad P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j).$$

Случајни догађаји H_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ се називају *хипотезе*, а формула $(*)$ се назива *формула потпуне вероватноће*.

Доказ формуле потпуне вероватноће се заснива на следећој репрезентацији $A = A\Omega = A\cap(H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_n) = \bigcup_{j=1}^{n} AH_j$. Како су догађаји AH_i и AH_j, за $i\neq j$ дисјунктни, добијамо да је вероватноћа догађаја A једнака

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} AH_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(AH_j).$$

Због $P(AH_j) = P(Hj)P(A/Hj)$, добијамо формулу потпуне вероватноће $(*)$.

Вероватноће $P(Hj)$ се називају *априорне вероватноће хипотеза.* Ако се зна да се реализовао догађај A, можемо одредити вероватноће $P(Hj/A)$, за свако $j = 1, 2, \ldots, n$. Те вероватноће се називају *апостериорне вероватноће хипотеза.*

Користећи формулу потпуне вероватноће апостериорне вероватноће рачунамо по формули

$$(**) \qquad P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Формула $(**)$ се назива *Бајесова формула.*

У општем случају је $P(H_k) \neq P(H_k/A)$. Једноставно се проверава да, у општем случају, важи: $\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k/A) = 1$, што се може применити при решавању задатака: (а) као провера да ли је збир свих израчунатих вероватноћа једнак 1, (б) као могућност да се једна од вероватноћа израчуна помоћу осталих $(n-1)$ вероватноћа.

Нека су A и B два догађаја из истог простора вероватноћа и нека у том простору H_1, H_2, ... , H_n чине потпун систем догађаја. Тада важи и

$$P(B/A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j/A)P(B/AH_j).$$

Пример 7. *Шетња*

Путник креће из места A, случајно бирајући пут на свакој раскрсници, без враћања уназад. Одредити вероватноћу да стигне у место B. Ако је стигао у место B, колика је вероватноћа да је прошао кроз место M?

Решење. Нека M означава долазак у место M, а B/M долазак у место B, ако путник полази из места M, и аналогно за остале случајеве. Тада имамо

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/M)P(M) + P(B/N)P(N) + P(B/S)P(S) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{36}. \end{aligned}$$

Ако је путник стигао у место B, вероватноћа да је прошао кроз место M је

$$P(M/B) = \frac{P(B/M)P(M)}{P(B)} = \frac{1/3 \cdot 1/3}{13/36} = \frac{4}{13}.$$

Напомена. Дати пример се, по својој структури, поклапа са следећим: У три истоветне кутије налазе се разнобојне куглице једнаких димензија. У првој кутији, означимо је са M, налази се $3a$ куглица, од којих је a белих, a плавих и a црвених, у другој кутији, означимо је са N је $2j$ куглица и то j белих и j зелених, а у трећој кутији, означимо је са S налази се $4r$ куглица и то по једнак број белих, сивих, браон и жутих. На случајан начин из једне од кутија се бира једна куглица. Одредити вероватноћу да је она беле боје. Ако је изабрана куглица беле боје, одредити вероватноћу да је изабрана из кутије означене словом M.

Пример 8. *Куглице, куглице, ...*

У три истоветне кутије налазе се куглице једнаких димензија. У првој кутији 6 белих и 2 шарене, у другој кутији 9 белих и 4 шарене, а у трећој кутији 4 беле и 3 шарене. На случајан начин се изабере једна куглица из прве кутије и пребаци у другу кутију. Од свих куглица које се сада налазе у другој кутији на случајан начин се изабере једна и пребаци у трећу кутију. Затим се из треће кутије на случајан начин узимају две куглице. Одредити вероватноћу да су обе беле боје.

Решење. Нека је A догађај: из треће кутије изабране су две беле куглице. Имамо потпун систем који чине догађаји H_1 и H_2, где је H_1 догађај: из друге у трећу кутију пребачена је куглица беле боје, а H_2 догађај: из друге у трећу кутију пребачена је шарена куглица. Тада је, по формули потпуне вероватноће

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = 5/8 \cdot 4/7\, P(H_1) + 4/8 \cdot 3/7\, P(H_2).$$

Треба одредити $P(H_1)$ и $P(H_2)$. Сада имамо потпун систем догађаја који чине догађаји M_1 и M_2, где је M_1 догађај: из прве у другу кутију пребачена је куглица беле боје, а M_2 догађај: из прве у другу кутију пребачена је шарена куглица. По формули потпуне вероватноће је

$$P(H_1) = P(H_1/M_1)P(M_1) + P(H_1/M_2)P(M_2) = 10/14 \cdot 6/8 + 9/14 \cdot 2/82/8.$$

Аналогно је

$$P(H_2) = P(H_2/M_1)P(M_1) + P(H_2/M_2)P(M_2) = 4/14 \cdot 6/8 + 5/14 \cdot 2/8.$$

Замењујући у израз за $P(A)$ добијамо да је $P(A) = 123/392$.

Пример 9. *Осетљива питања*

У групи анкетираних особа, анкета је анонимна, сваки учесник прво баца нумерисану коцку, а затим новчић. Ако при бацању новчића добије „писмо“, тада одговара на питање „А“, а у супротном случају одговара на питање „Б“. На листићу анкетирани записује одговор (на оно питање на које је одговарао, али, наравно не пише на које је питање одговарао). Питања су:

„А“ да ли сте добили паран број при бацању коцке?

„Б“ да ли сте пробали неку дрогу?

У групи је било 50 особа. Добијено је 36 одговора „ДА“. Ако сматрамо да је због анонимности анкете и „маскирања“ одговора на осетљиво питање, сваки учесник истинито одговарао, оценити вероватноћу да је случајно изабрана особа пробала дрогу.

Решење. Нека су догађаји означени на следећи начин: D – одговор је „ДА“, A – одговор је дат на питање „А“, B – одговор је дат на питање „Б“, па имамо по формули потпуне вероватноће да је $P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B)$, а како је $P(A) = P(B) = 1/2$ и $P(D/A) = 1/2$, процењујући да је $P(D) = 36/50$, добијамо да је $P(D/B) = 47/50$.

Пример 10. *Лавиринт*

На једној од означених раскрсница налази се особа са повезом преко очију. Са било које раскрснице са једнаком вероватноћом ће кренути на исток, запад, север или југ. Кретање се завршава доласком на неки од излаза, који су означени стрелицама. Ако кретање није временски ограничено, колика је вероватноћа да ће та особа изаћи из лавиринта на један од излаза на јужној страни.

Решење. Нека R_j означава стизање на неки од излаза на јужној страни, ако се пође од раскрснице R_j. По формули потпуне вероватноће је

$$\begin{aligned}
P(R_1) &= \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(R_2) + \frac{1}{4}\cdot P(R_4),\\
P(R_2) &= \frac{1}{4}\cdot P(R_1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(R_3) + \frac{1}{4}\cdot P(R_5),\\
P(R_3) &= \frac{1}{4}\cdot P(R_2) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(R_6),\\
P(R_4) &= \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(R_1) + \frac{1}{4}\cdot P(R_5) + \frac{1}{4}\cdot P(R_7),\\
P(R_5) &= \frac{1}{4}\cdot P(R_4) + \frac{1}{4}\cdot P(R_2) + \frac{1}{4}\cdot P(R_6) + \frac{1}{4}\cdot P(R_8),\\
P(R_6) &= \frac{1}{4}\cdot P(R_5) + \frac{1}{4}\cdot P(R_3) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(R_9),
\end{aligned}$$

$$P(R_7) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot P(R_4) + \frac{1}{4} \cdot P(R_8) + \frac{1}{4} \cdot 1,$$
$$P(R_8) = \frac{1}{4} \cdot P(R_7) + \frac{1}{4} \cdot P(R_5) + \frac{1}{4} \cdot P(R_9) + \frac{1}{4} \cdot 1,$$
$$P(R_9) = \frac{1}{4} \cdot P(R_8) + \frac{1}{4} \cdot P(R_6) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1.$$

Решавањем овог система једначина добијамо

$$P(R_1) = P(R_3) = 0{,}071, \quad P(R_2) = 0{,}098, \quad P(R_4) = P(R_6) = 0{,}187,$$
$$P(R_5) = 0{,}25, \quad P(R_7) = P(R_9) = 0{,}428, \quad P(R_8) = 0{,}526.$$

Пример 11. *На ивици провалије*

На ивици провалије стоји пијаница који са вероватноћом p чини корак напред (и пада у провалију), а са вероватноћом $1-p$ чини корак назад. Колика је вероватноћа да ће упасти после највише пет корака? Колика је вероватноћа да ће упасти у провалију ако се (неограничено дуго) „шета“ корацима исте дужине?

Решење. Ивица провалије означена је тачком 0, провалија $(+1)$, а „чврста“ земља (-1), (-2), итд. (видети слику).

Може упасти после првог корака, или после трећег или после петог. Те могућности су дисјунктне, и вероватноћа траженог догађаја је збир вероватноћа ова три догађаја. Тако су, на пример, низови корака 0, (-1), 0, (-1), 0, 1 и 0, (-1), (-2), (-1), 0, 1 низови који доводе до упадања у провалију у петом кораку. Претпостављамо да из сваке тачке иде напред са вероватноћом p и да су „кораци“ међусобно независни. Због свега тога је вероватноћа да ће упасти у провалију после највише пет корака

$$P(A_1 \cup A_3 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) = p + (1-p)p^2 + 2(1-p)^2p^3.$$

Ако не ограничавамо број корака, имамо да може упасти после првог, или трећег или, уопште, после непарног броја корака. Ако означимо са p_0 тражену вероватноћу, онда је, по условима задатка то истовремено и вероватноћа стизања у тачку 0 из тачке (-1), у тачку (-1) из тачке (-2), и слично, из тачке (k) у тачку $(k+1)$. Ако је p_1 вероватноћа стизања у тачку (1) из тачке (-1), онда је очигледно да важи $p_1 = p_0^2$. С друге стране, по формули потпуне вероватноће је вероватноћа стизања у тачку (1) из тачке 0 једнака

$$p_0 = p \cdot 1 + (1-p)p_1 = p + (1-p)p_0^2.$$

Решења те квадратне једначине су $p_0 = 1$, $p_0 = p/(1-p)$. Како за $p \geqslant 1/2$ важи $p/(1-p) \geqslant 1$ следи да је у том случају решење $p_0 = 1$, тј. да сигурно упада у провалију (ако је довољно „упоран“ и шета се неограничено дуго том истом праволинијском стазом која се завршава у провалији). Ако је $p < 1/2$, онда је вероватноћа стизања у тачку (1) једнака $p_0 = p/(1-p)$.

Пример 12. *Временска прогноза*

У једној области у току дана може бити или кишовито или сунчано време. Ако је дан сунчан, вероватноћа да ће следећег дана падати киша је 0,2, а ако је дан био кишовит, вероватноћа да ће следећег дана бити сунчано је 0,4.

(а) Ако је у четвртак падала киша, одредити вероватноћу да ће у недељу бити сунчано време.

(б) Ако је 17.5. падала киша, која је вероватноћа да ће 17.6. падати киша?

Решење. (а) Уведимо ознаке: P_s – петак, сунчано време, P_k – петак, кишовито време, S_s – субота, сунчано време, S_k – субота, кишовито време и N_s – недеља, сунчано време. По формули потпуне вероватноће је

$$P(N_s) = P(N_s/S_s)P(S_s) + P(N_s/S_k)P(S_k) = 0{,}8 \cdot P(S_s) + 0{,}4 \cdot P(S_k).$$

Аналогно је

$$P(S_s) = P(S_s/P_s)P(P_s) + P(S_s/P_k)P(P_k) = 0{,}8 \cdot P(P_s) + 0{,}4 \cdot P(P_k).$$
$$P(S_k) = P(S_k/P_s)P(P_s) + P(S_k/P_k)P(P_k) = 0{,}2 \cdot P(P_s) + 0{,}6 \cdot P(P_k).$$

Како је $P(P_s) = 0{,}4$, $P(P_k) = 0{,}6$, добијамо $P(S_s) = 0{,}56$, $P(S_k) = 0{,}44$, и коначно $P(N_s) = 0{,}624$.

(б) Да не бисмо, као у случају (а) рачунали потребне вероватноће редом за сваки дан, поступићемо мало друкчије. Нека D_k означава догађај да је k-ти дан после 17.5. кишовит, а $\overline{D}_k$ означава догађај да је k-ти дан после 17.5. сунчан. Та два догађаја чине потпун систем догађаја, за свако k. По формули потпуне вероватноће је

$$\begin{aligned} P(D_k) &= P(D_k/D_{k-1})P(D_{k-1}) + P(D_k/\overline{D}_{k-1})P(\overline{D}_{k-1}) \\ &= 0{,}6P(D_{k-1}) + 0{,}2(1 - P(D_{k-1})) = 0{,}2 + 0{,}4 \cdot P(D_{k-1}). \end{aligned}$$

Користећи добијену рекурентну формулу налазимо да је

$$\begin{aligned} P(D_{31}) &= 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + \cdots + 0{,}4^{29} \cdot 0{,}2 + 0{,}4^{30} \cdot P(D_1) \\ &= 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + \cdots + 0{,}4^{29} \cdot 0{,}2 + 0{,}4^{30} \cdot 0{,}6 = \frac{1}{3} + 3{,}07 \cdot 10^{-13}. \end{aligned}$$

Иста рекурентна формула даје да $P(D_k) \to 1/3$ ако $k \to \infty$.

Пример 13. *Једноставни модел из теорије информација*

Једна од информација a_1, a_2, a_3 треба да се пренесе. Познате су вероватноће слања тих информација и оне су редом једнаке $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}2$. Због постојања сметњи у каналу везе свака од информација a_1, a_2, a_3 буде у извесној мери измењена и могуће информације на пријемном апарату су b_1, b_2,

b_3, b_4, b_5, b_6. Познате су вероватноће p_{ij} примања информације b_j ако је послата информација a_i и те вероватноће су дате у табели

p_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	Σ
a_1	0,7	0,2	0,1	0	0	0	1
a_2	0	0	0,1	0,8	0,1	0	1
a_3	0	0	0	0	0,9	0,1	1

Одредити вероватноће q_{ji} да је примљена информација b_j ако је послата информација a_i.

Решење. Одредићемо најпре вероватноће q_j примања информације b_j. Те вероватноће се одређују по формули потпуне вероватноће

$$q_j = p_1 p_{1j} + p_2 p_{2j} + p_3 p_{3j}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6$$

и имамо $q_1 = 0{,}42$, $q_2 = 0{,}12$, $q_3 = 0{,}08$, $q_4 = 0{,}16$, $q_5 = 0{,}20$, $q_6 = 0{,}02$. Тражене вероватноће q_{ji} се рачунају по Бајесовој формули

$$q_{ji} = P(a_i/b_j) = \frac{P(b_j/a_i)P(a_i)}{P(b_j)} = \frac{p_{ij}p_i}{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6, \ i = 1, 2, 3.$$

Тако добијамо

q_{ji}	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	1	1	3/4	0	0	0
a_2	0	0	1/4	1	1/10	0
a_3	0	0	0	0	9/10	1
Σ	1	1	1	1	1	1

Као принцип декодирања усвојимо правило: ако је примљена информација b_j, сматрамо да је послата она од информација a_i за коју је

$$g_{ji} = \max_i q_{ji}.$$

У том смислу, за наведени пример имамо: ако је примљена информација b_1, b_2 или b_3, сматрамо да је послата a_1, ако је примљена b_4 сматрамо да је послата a_2, и ако је примљена b_5 или b_6, сматрамо да је послата a_3.

Условне вероватноће се примењују и у вези условног математичког очекивања. Овде о томе неће бити говора. На крају наводимо још коришћење формуле потпуне вероватноће у вези случајних променљивих дефинисаних на један посебан начин.

Пример 14. *Мешавине случајних променљивих*

Нека су $X_1, \ldots, X_k$ произвољне случајне променљиве. Случајна променљива Y је мешавина случајних променљивих $X_1, \ldots, X_k$ ако је

$$Y = X_j \quad \text{са вероватноћом} \quad p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

при чему је $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Каже се да су $X_1, \ldots, X_k$ компоненте случајне променљиве Y. Одредити функцију расподеле за Y.

Решење. Функција расподеле $F_Y(x)$ случајне променљиве Y се одређује по формули потпуне вероватноће на основу функција расподеле $F_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ компонената $X_1, \ldots, X_k$. Имамо да је

$$\begin{aligned} F_Y(x) = P(Y < x) &= \sum_{j=1}^{k} P(Y < x / Y = X_j) P(Y = X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P(X_j < x) P(Y = X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} p_j P(X_j < x) = \sum_{j=1}^{k} p_j F_j(x). \end{aligned}$$

Дакле, функција расподеле мешавине случајних променљивих је линеарна комбинација функција расподеле компонената. У питању је тзв. конвексна комбинација, јер су коефицијенти позитивни и збир им је једнак 1. Добијени резултат можемо користити да се подсетимо на карактеристичне особине функције расподеле и уочимо да се те особине очувавају и у линеарној конвексној комбинацији функција расподеле.

Ако су $X_1, \ldots, X_k$ непрекидне случајне променљиве са густинама расподеле $g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, тада је густина расподеле $g_Y(x)$ случајне променљиве Y линеарна комбинација густина расподеле компонената

$$g_Y(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j g_j(x).$$

На основу тога добија се и да је математичко очекивање за Y линеарна комбинација очекивања компонената.