Предраг Радиновић

ЈЕДАН НАЧИН РЕШАВАЊА ЈЕДНАЧИНЕ ЧЕТВРТОГ СТЕПЕНА

Једначину четвртог степена је још у 16. веку решио италијански математичар Ферари (L. Ferrari, 1522–1565). Решавање те једначине Ферари је свео на решавање једне једначине трећег степена и две квадратне једначине.

Метода која ће овде бити изложена слична је методи за решавање једначине трећег степена која је објављена у броју XLII, 1–2 овог часописа. Овом методом, као што ће се видети, решавање једначине четвртог степена у потпуном облику, своди се на решавање једне једначине трећег степена.

Нека је дата једначина

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0. \tag{1}$$

Решење те једначине тражимо у облику $x = A + B + C + D$ и вршимо следеће трансформације:

$$x - D = A + B + C, \qquad (x - D)^4 = (A + B + C)^4. \tag{2}$$

Сређивањем се добија

$$\begin{aligned}(x - D)^4 = {} & 4(A^2 + B^2 + C^2)(AB + BC + CA) + 8ABC(A + B + C) + \\ & + (A^2 + B^2 + C^2)^2 + 4(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2).\end{aligned} \tag{3}$$

Из (2) имамо $(x - D)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA)$, односно

$$AB + BC + CA = \frac{(x - D)^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}{2}. \tag{4}$$

Заменимо ли $A + B + C$ из (2) и $AB + BC + CA$ из (4) у (3), добијамо

$$\begin{aligned}(x - D)^4 = {} & 4(A^2 + B^2 + C^2)\frac{(x - D)^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}{2} + 8ABC(x - D) + \\ & + (A^2 + B^2 + C^2)^2 + 4(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2),\end{aligned}$$

односно сређивањем,

$$\begin{aligned}& x^4 - 4Dx^3 + [6D^2 - 2(A^2 + B^2 + C^2)]x^2 - \\ & - [8ABC - 4D(A^2 + B^2 + C^2) + 4D^3]x + D^4 - 2D^2(A^2 + B^2 + C^2) + \\ & + 8ABCD - 4(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2) + (A^2 + B^2 + C^2)^2 = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Како желимо да A, B, C, D одредимо тако да се једначина (5) „поклопи“ са једначином (1), то имамо следеће једначине:

$$-4D = p, \tag{6}$$

$$6D^2 - 2(A^2 + B^2 + C^2) = q, \tag{7}$$

$$-[8ABC - 4D(A^2 + B^2 + C^2) + 4D^3] = r, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} D^4 - 2D^2(A^2 + B^2 + C^2) + 8ABCD- \\ -4(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2) + (A^2 + B^2 + C^2)^2 = s. \end{gathered} \tag{9}$$

Из (6) следи $D = -p/4$. Заменом D у (7), (8), (9), налажење A, B, C се своди на решавање једначине трећег степена. Заиста, из (7), (8) и (9) следи

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{3p^2 - 8q}{16}, \qquad ABC = \frac{-p^3 + 4pq - 8r}{64}, \tag{10}$$

односно

$$A^2B^2C^2 = \left(\frac{-p^3 + 4pq - 8r}{64}\right)^2, \tag{11}$$

$$A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2 = \frac{3p^4 - 16qp^2 + 16rp + 16q^2 - 64s}{256}. \tag{12}$$

Узмемо ли да је $A^2 = t_1$, $B^2 = t_2$ и $C^2 = t_3$, то из (10), (11) и (12) добијамо да t_1, t_2 и t_3 треба да буду корени једначине трећег степена

(13)

$$t^3 - \frac{3p^2 - 8q}{16}\,t^2 + \frac{3p^4 - 16qp^2 + 16rp + 16q^2 - 64s}{256}\,t - \left(\frac{-p^3 + 4pq - 8r}{64}\right)^2 = 0.$$

Решавањем једначине (13) добијамо A^2, B^2, C^2, односно A, B, C и уз $D = -p/4$ решење једначине (1) $x = \pm A \pm B \pm C \pm D$. Од осам резултата, четири одбацујемо системом провере.

Ова метода би се могла назвати општом методом за решавање једначина II, III и IV степена. Заиста, за решавање једначине трећег степена, као што је изложено у поменутом чланку, полази се од тога да је $x = A + B + C$. И квадратна једначина се тим поступком може решити. Пођимо од тога да је решење квадратне једначине

$$x^2 + px + q = 0 \tag{14}$$

облика $x = A + B$. Тада је $x - A = B$, односно $(x - A)^2 = B^2$ и

$$x^2 - 2Ax + A^2 - B^2 = 0. \tag{15}$$

Желимо да се (15) поклопи са (14), па добијамо $-2A = p$ и $A^2 - B^2 = q$, одакле мора бити $A = -\dfrac{p}{2}$, $B = \dfrac{\pm\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, па је $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Дакле, овим поступком за квадратну једначину решење тражимо у облику $x = A + B$, за једначину трећег степена у облику $x = A + B + C$, а за једначину четвртог степена у облику $x = A + B + C + D$.