др Миливоје Г. Лазић

НЕКА ИСКУСТВА С ПОЛУПРОГРАМИРАНИМ ПРОВЕРАВАЊЕМ ЗНАЊА У УНИВЕРЗИТЕТСКОЈ НАСТАВИ

Вредновање знања и, из њега изведено, оцењивање је важан сегмент наставног процеса сваког предмета и на свим нивоима. Осврнућемо се на тај проблем у оквиру наставе математике на универзитетском нивоу, користећи се при томе нашим искуствима из наставе на Учитељском факултету. При томе ћемо се ограничити на „технику“ вредновања и њен приказ кроз неколико примера, указујући на предности и мане предложених решења.

Иако је тешко дати прецизан одговор на питање када је почело трагање за налажењем нових, нетрадиционалних начина вредновања знања, може се прихватити да су крајем XIX века чињени извесни напори у том правцу [1], који су даље прерасли у значајну области теорије и праксе математике. Програмирана или полупрограмирана настава пружа могућности за такве кораке. Вероватно као последица чињенице да се теоријским основама наставе математике баве математичари, психолози и педагози који су укључени у процес образовања наставника математике за почетне нивое наставе (млађи разреди основне школе (grade K-4, према неким западним стандардима), односно старији разреди основне школе (grade 5–8 према истим стандардима)), таква су решења присутна пре свега у наставној пракси на тим нивоима, укључујући повремено и вредновање математичких знања. У нашој литератури из методике математике овоме се у последње време поклања пажња [2].

У универзитетској настави готово да није било озбиљних покушаја програмиране или полупрограмиране реализације садржаја, док се у сфери вредновања знања срећу такви покушаји. На пример, у [3] срећемо низ тако формулисаних задатака, које бисмо ми сматрали елементарним, за чије се решавање предлажу одређени кораци, помоћу „држача места“ и сл.

Проверавање знања путем тестова је често практиковано. Потреба за техником вредновања знања, различитом од традиционалне (писмени, усмени), вероватно је већа на факултетима на којима су потребе наставе веома значајне, какви су учитељски факултети, који образују будуће прве наставнике математике, па стога морају суверено овладати многим појмовима у областима математике, а већина уписаних студената доноси скромна предзнања и често се према математици односи са страхом или неком другом врстом отпора. Како такву популацију студената довести до свести да оне садржаје који му требају мора знати добро? Можда и путем одговарајућих начина провере знања?

Ми смо покушали да студентим помогнемо увођењем полупрограмираних провера знања. Да ли смо успели?

Напомена. На испитима је дозвољено коришћење литературе.

Примери и коментари

Коментарисаћемо неколико примера из наше књиге „Тестови из математике" (Учитељски факултет, Београд 1997). Тако, тест-питање 1.22 (стр 3) гласи:

Функција $f(x)$ је ограничена ако и само ако $\underline{\hspace{3cm}}_{(1)}$ *тако да је* $|f(x)|$ $\underline{\hspace{3cm}}_{(2)}$.

Стандардан тачан одговор добија се стављајући „постоји $K \geqslant 0$" на држач места (1) и „$\leqslant K$ за свако $x \in D_f$" — на држач места (2). Међутим, тачан је одговор и кад се уместо „$K \geqslant 0$" стави „$K > 0$", „$K \geqslant 1$", „$K > 1$", „$K \geqslant 2$", ... При томе, знање оних кандидата који то могу и да објасне свакако да се може вредновати квалитетнијим. То се тим пре може рећи за знање оних кандидата који умеју да објасне што се уместо „$K \geqslant 0$" може узети „$K \in \mathbf{R}$", као и што се уместо „$\leqslant K$" може ставити „$< K$".

Наведени пример показује да неко тест-питање може имати бесконачно много тачних одговора. Исто важи и за тест-питање 1.19 (стр. 2), које гласи:

Ако је p период функције, онда је и $\underline{\hspace{2.5cm}}_{(1)}$ *период исте функције за свако* $\underline{\hspace{2.5cm}}_{(2)}$.

Стандардним тачним одговором би се могао сматрати онај у коме је држач места (1) попуњен са „kp", а држач места (2) — са „$k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$". Али, тачан је одговор кад се држач места (2) попуни са: „$k \in \{1\}$", „$k \in \{1, 2\}$", ... , „$k \in \mathbf{N}$", „$k \in -\mathbf{N}$", ...

Видимо, дакле, да у овом полупрограмираном начину испитивања знања „има места и за машту". Исти начин испитивања може да послужи за „изоштравање знања" у вези са неким (математичким) појмовима. У том контексту посматрајмо тест-питање:

Функција $f(x)$ је ограничена $\underline{\hspace{3.5cm}}$ $(\forall x \in D_f)\, |f(x)| \leqslant 3$.

Од три „природне" могућности за попуњавање држача места: „ако је", „ако и само ако је", „само ако је", тачан исказ имамо само у првом случају. Кандидат који уме да објасни зашто исказ у трећем случају није тачан, као и зашто одатле следи да и у другом случају исказ није тачан, заслужује високу оцену свог знања (у том случају).

И следеће тест-питање (2.4) може послужити за илустрацију могућности утврђивања „изоштрености знања" кандидата:

Константа $\underline{\hspace{2.5cm}}_{(1)}$ *је полином нултог степена, а* $\underline{\hspace{2.5cm}}_{(2)}$ *је полином неодређеног степена.*

Свакако да је стандардан тачан одговор (у складу са „теоријом") кад се на држач места (1) упише „различита од нуле" и „нула" (тј. полином који је идентички једнак нули). Међутим, тачан је и одговор када се само на држач места (2) упише „нула" (зато што се и константа нула, као полином неодређеног степена, може сматрати полиномом нултог степена). Знање оних кандидата који то запазе и умеју да објасне сигурно заслужује више вредновање. Примећујемо, такође, да се тачан одговор има и кад се држач места (1) попуни било којом одређеном константом: -3, -1, 2, 4, $\dots$, па (како смо рекли) и константом „нула (0)".

Понекад је кандидатима проблем и сама (математичка) терминологија. То долази до изражаја на тест-питањима, као што је следеће:

Ако је $f(x_0)=0$, *онда је* x_0 __________$_{(1)}$ *функције* $f(x)$ *и* __________$_{(2)}$ *(*__________$_{(3)}$*)* __________$_{(4)}$ $f(x)=0$.

Таква и слична питања доприносе разликовању и прихватању адекватне терминологије у појединим областима. Тако, у стандарном приступу држач места (1) треба попунити за „нула" (а не са „корен" или „решење"), држач места (2) — са „решење" или „корен" (а не са „нула"), држач места (3) — са „корен" или „решење" (а не са „нула") и држач места (4) — са „једначине" (а не са „функције"). Сходно претходном, не говори се о „корену (решењу) функције", као ни о „нули једначине". Слично томе, није исправно рећи ни да је „x непозната функције $f(x)$", као ни да је „x променљива једначине $f(x)=0$".

Занимљив коментар може се дати и на следеће питање (2.26):

Полином степена $n \geqslant 1$ *има највише* n ______________ .

Попуњавање држача места само речју „нула" може се прихватити као тачан одговор једино уколико постоји конвенција да кад говоримо о нулама полинома мислимо само на различите нуле. Иначе, изван таквог контекста, тачан је одговор кад се држач места попуни са „различитих нула". Занимљиво је, међутим, да осим тих стандардних одговора, тачан одговор имамо и кад се држач места попуни са (натегнутим) „различитих вредности независне променљиве у којима узима одређену вредност"; „различитих реалних (имагинарних) нула"; „коефицијената једнаких нули"; ...

Више могућности тачних одговора, иако не сасвим природних, може се видети и код следећег питања (3.28):

Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *онда је* $\lim\limits_{n\to\infty}$ __________$_{(1)} = |$_____$_{(2)}|$; *обрнуто не важи, што показује пример низа* $a_n =$ __________$_{(3)}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Држач места (1) природно се попуњава са $|a_n|$, а онда држач места (2) — са „a". Међутим, држач места (1) може се, на пример, попунити и са $|2a_n|$, а онда држач места (2) — са $2a$. Може се, исто тако, држач места (1) попунити да $|\frac{n}{n+1}a_n|$, а онда држач места (2) — са „a". Такође, може се држач места (1) попунити „неприродним" $\left|\dfrac{a_n}{1+|a_n|}\right|$, а онда држач места (2) — са $\dfrac{a}{1+|a|}$, мада ово још више личи на „натезање" од претходног.

Што се тиче држача места (3), ту поред добро познатог примера низа $(-1)^n$ могу да се користе и многи други низови: $\dfrac{n(-1)^n}{n+1}$, $\dfrac{1}{2}(-1)^n$, $\dfrac{3n}{2n-1}(-1)^n$, ...

Разне, па и још необичније могућности тачних одговора, могу се видети на следећем питању (3.31):

Ако је низ (a_n) *растући и ограничен одозго, онда је низ* (a_n) __________$_{(1)}$ *и важи* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ____________$_{(2)}$.

Оно што теорија стандардно „каже" јесте да држач места (1) треба попунити речју „конвергентан", док држач места (2) треба попунити са $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$ (или, само, $\sup a_n$). Али тачан одговор је и када се држач места (1) попуни: изразом „ограничен одозго" или „ограничен одоздо", или „ограничен", или „растући" или „неопадајући", ... , а држач места (2) попуни: „изразом" $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$, или $\lim \dfrac{\lambda a_n + \mu a_{n+1}}{\lambda+\mu}$ (где је $\lambda+\mu \neq 0$), ... Искуснији и виспренији посленици у математици свакако да се већ досећају да је „најелегантнији" тачан одговор када се држач места (1) попуни са „растући и ограничен одозго", а држач места (2) — са $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, како се може поступити и код многих других тест-питања (и тест-задатака). Примећујемо, међутим, да таквих досетки („подметања") још нисмо имали на испитивањима, што говори о „поштењу кандидата и њиховом веровању у наше добре намере".

При „измишљању" тест-питања и тест-задатака, може да се „поткраде" и нека наша грешка, што ћемо илустровати следећим питањем (4.10):

Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$*, онда је* $(\forall k \in \mathbf{R})\ \lim\limits_{x\to a}$ ____________$_{(1)} = kb$*;* $\lim\limits_{x\to a}$ ____________$_{(2)} = |b|$.

„Грешка" се састоји у томе што за $b=\infty$ и $k=0$ израз kb гласи $0\cdot\infty$, што припада категорији тзв. неодређених израза, па се тада, по тачном одговору, „не би знало" шта је $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)]$, мада имамо: $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = \lim\limits_{x\to a}[0\cdot f(x)] = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$. (При томе имамо у виду да се стандардан тачан одговор добија уписивањем $[kf(x)]$ на држач места (1) и $|f(x)|$ — на држач места (2)).

Исти пример може да послужи за илустрацију како би се квалитетни кандидати могли „измотавати" са нама и давати неочекиване и нестандардне, али тачне одговоре. Тако, на пример, у случају $b\in\mathbf{R}$, држач места (1) може се попунити са $k[f(x) + l(x-a)^m]$, а у сваком случају држач места (2) — са $|f(x) + n(x-a)^p|$, где су l, n произвољни и m, p позитивни реални бројеви. По нашем мишљењу, ако су такви одговори дати са „предумишљајем", онда то показује виши квалитет знања кандидата, него када се држачи места попуне стандардним и очекиваним изразима ($[kf(x)]$, односно $|f(x)|$).

Утврђивању познавања односа међу разним особинама функције, доприносе тест-питања као што је следеће:

Ако је функција f *непрекидна на* $[a,b]$*, онда је функција* f ____________ .

Држач места овде се може попунити са: „ограничена на $[a,b]$“, „интеграбилна на $[a,b]$“, „униформно непрекидна на $[a,b]$“, што би се могло сматрати да су стандардно очекивани тачни одговори на посматрано тест-питање. Међутим, тачан је одговор и кад се држач места попуни са: „непрекидна на сваком подсегменту $[\alpha,\beta]$ сегмента $[a,b]$“. Примећујемо, узгред, да није тачан одговор кад се држач места попуни са: „непрекидна у свакој тачки $x\in[a,b]$“, „непрекидна на сваком подскупу X сегмента $[a,b]$“ (зато што непрекидност функције на сегменту подразумева њене једностране непрекидности на његовим границама, а непрекидност функције у некој тачки значи њену двострану непрекидност у тој тачки).

Карактеристично је, такође, и следеће тест-питање (5.3):

Ако је функција f непрекидна у тачки x и важи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\underline{\qquad\qquad}_{(1)} = \underline{\qquad\qquad}_{(2)}$, *или* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\underline{\qquad\qquad}_{(3)} = \underline{\qquad\qquad}_{(4)}$, *онда се каже да функција f има* $\underline{\qquad\qquad\quad}_{(5)}$ *извод у тачки x (са знаком „*$\underline{\qquad}_{(6)}$*“, односно са знаком „*$\underline{\qquad}_{(7)}$*“); при томе се пише* $f'(x) = \underline{\qquad\qquad}_{(8)}$, *односно* $f'(x) = \underline{\qquad\qquad}_{(8)}$.

Стандардан тачан одговор је када се: на држаче места (1) и (3) упише $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, $-\infty$ (или $+\infty$) — на држач места (2), $+\infty$ (односно $-\infty$) — на држач места (4), реч „бесконачан“ — на држач места (5), $-$ (односно $+$) — на држач места (6), $+$ (односно $-$) — на држач места (7), $-\infty$ (односно $+\infty$) — на држач места (8) и $+\infty$ (односно $-\infty$) — на држач места (9). У овом случају, када постоји алтернатива, заједно „иду“ први одговори и заједно — алтернативе, тако да су овим дата „само“ два тачна одговора. Ако би неко нашао и још неки други тачан одговор, са коректним објашњењем, био би то показатељ вишег квалитета његовог знања и виспрености.

Када је реч о тест-питању (5.22):

Ако је функција f строго монотона и непрекидна и постоји $y' = f(x) \neq 0$, *онда постоји и* $\underline{\qquad\qquad}_{(1)}$, *где је* $y = \underline{\qquad\qquad}_{(2)}$*; при томе важи* $(f^{-1})'(y) = \underline{\qquad\qquad}_{(3)}$ $(x' = \underline{\qquad\qquad}_{(4)})$,

стандардан тачан одговор је кад се $x' = (f^{-1})'(y)$ упише на држач места (1), $f(x)$ — на држач места (2), $\dfrac{1}{f(x)}$ — на држач места (3) и $\dfrac{1}{y'}$ — на држач места (4). Међутим, тачан је одговор и кад се на држач места (1) упише „строго монотона и непрекидна инверзна функција $x = f^{-1}(y)$“, иако то овде није сасвим очекивано, с обзиром на контекст у коме се углавном ради са изводима.

У тест-задацима потребно је најчешће „на страни“ извршити нека претходна израчунавања. То ћемо илустровати на примеру (5.31):

Ако је $f(x) = xe^{-x}$, *онда је* $f^{(100)}(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}_{(1)}$; $f^{(110)}(0) = \underline{\qquad\qquad\quad}_{(1)}$. *Образложење:* $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

Прво бисмо урадили образложење (нешто опширније).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};\\
f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x};\\
f'''(x) &= e^{-x} - (x-2)e^{-x} = (3-x)e^{-x};\\
f^{(IV)}(x) &= -e^{-x} - (3-x)e^{-x} = (x-4)e^{-x};\\
&\ldots\ldots\\
f^{(2k)}(x) &= (x-2k)e^{-x} \quad (k=0,1,2,\ldots);\\
f^{(2k+1)}(x) &= (2k+1-x)e^{-x} \quad (k=0,1,2,\ldots);\\
f^{(100)}(x) &= (x-100)e^{-x}; \quad f^{(110)}(x) = (x-110)e^{-x};\\
f^{(110)}(0) &= (0-110)e^{-0} = -110.
\end{aligned}$$

Дакле, држач места (1) треба попунити са $(x-100)e^{-x}$, а држач места (2) — са „-110“; што се тиче држача места (3), ту се може уписати само $f^{(2k)}(x) = (x-2k)e^{-x}$, $f^{(2k+1)} = (2k+1-x)e^{-x}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Како нам се може „подвалити“ у неким тест-питањима и тест-задацима (осим коришћења таутологија типа $p \implies p$ и $p \iff p$), видимо из следећег тест-питања (које се може третирати и као тест-задатак; 5.41):

Важи: $dc =$ ______$_{(1)}$; $dx^\alpha =$ ______$_{(2)}$; $da^x =$ ______$_{(3)}$; $de^x =$ ______$_{(4)}$.

Уместо стандардног 0 $(= 0 \cdot dx)$ — код (1); $\alpha x^{\alpha-1}\,dx$ — код (2); $a^x \ln x\,dx$ — код (3); $e^x\,dx$ — код (4), може нам се „подвалити“ стављајући: dc ($d(2c)$, $d(3c)$, $\ldots$, $d(kc)$) — код (1); $d(x^\alpha + C)$ — код (2); $d(a^x + C)$ — код (3); $d(e^x + C)$ — код (4).

Како ситуација понекад може да буде „комична“ показује следећи пример (6.19):

Количник функција $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *је неодређеност типа* $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, *кад* $x \to a$, *ако је* ____________________________ .

Јасно је да је стандардан тачан одговор кад се на држачу места упише: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ $\big(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty\big)$. Међутим, условно речено, тачан је одговор и кад се напише $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ $\big(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\big)$. То следи из тачности трансформације $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$, при чему у случају $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ следи $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, па је истовремено реч и о неодређености типа $\dfrac{0}{0}$, и аналогно у другом случају.

У примеру (6.16):

Збир функција $f(x) + g(x)$ *је неодређеност типа* $\infty - \infty$, *кад* $x \to a$, *ако и само ако је* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$ ______$_{(1)}$ *или* ________________$_{(2)}$.

не би било коректно држач места (1) попунити са $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, а држач места (2) — са $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$. Наиме, тачан је одговор само ако се држач места (1) попуни са $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, а држач места (2) — са $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$. Ово зато што $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ не значи исто што и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. (Као што је познато, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ значи

$$(\forall E>0)(\exists\delta(E)>0)(\forall x\in O_{\delta(E)}(a))\, f(x)\in O_E(+\infty),$$

а $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ значи $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$.)

Које још „замке“ постоје у давању тест-питања и тест-задатака, показује и следећи пример (6.27):

Тачка x_0 је тачка локалног минимума (максимума) функције $f(x)$ ако и само ако ______________________________ .

Наиме, држач места, стандардно размишљајући, попуњава се са $(\exists\delta>0)$ $(\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))\, f(x)\geqslant f(x_0)$ $(f(x)\leqslant f(x_0))$ (што је дефиниција тачке локалног минимума (максимума)). Може се, међутим, учинити да се држач места може попунити и са „$(f'(x_0)=0 \vee \overline{\exists} f'(x_0)) \wedge f'(x)$ мења знак у тачки x_0“, што је „мешање“ са ставом који даје довољне услове за тачку локалног екстремума! То не може да „прође“ зато што ни у једној околини тачке локалног екстремума функција не мора „непрекидно“ имати извод. (Постоје, наиме, такве функције!) Отуда се, у општем случају, не може говорити о промени знака извода у некој тачки.

Илустративно је и следеће тест-питање (7.16):

Ако је $f(x)$ непрекидна функција на сегменту $[a,b]$ и $\Phi(x)$ било која њена ____________________$_{(1)}$, *онда важи формула*

$$\int_{\_\_(2)}^{\_\_(3)} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_{}_{(4)} = \Phi(\_\_\_{}_{(5)}) - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_{}_{(6)},$$

што се записује у облику

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_{}_{(7)} = \Phi(x)\Big|_{\_\_(8)}^{\_\_(9)}.$$

По концепцији (јер је то у делу код одређеног интеграла): држач места (1) треба попунити са „примитивна функција“, држаче места (2) и (8) — са a, држаче места (3), (5) и (9) — са b, држач места (4) — са $f(x)\,dx$, држач места (6) — са $\Phi(a)$ (чиме се добија чувена Њутн-Лајбницова формула), држач места (7) са $\int_a^b f(x)\,dx$ (што даје исту формулу у симболичком облику). Међутим, први део исказа је тачан и када се: држачи места (2) и (3) оставе непопуњени, држач места (4) попуни са $f(x)\,dx$, држач места (5) — са x, а држач места (6) — са C

(или са $-C$). Тиме се добија позната формула за израчунавање неодређеног интеграла

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) - C \quad (\text{односно } \int f(x)\,dx = \Phi(x) + C).$$

Наводимо још нека интересантна тест-питања, као што је следеће:

Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни ако и само ако ________________ .

Јасно је да се тачан исказ добија кад се држач места попуни било којим од следећа три исказа: „њихови носачи су паралелни“ (што се обично узима као дефиниција); „су линеарно зависни“ (што значи $(\exists\alpha,\beta \in \mathbf{R})(\alpha^2+\beta^2 > 0 \land \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0})$), $((\exists\lambda \in \mathbf{R})\,\vec{b} = \lambda\vec{a}) \lor ((\exists\mu \in \mathbf{R})\,\vec{a} = \mu\vec{b})$.

Или:

Равни α и β су паралелне ако и само ако ____________________ .

Често се „претендује“ да је тачан одговор кад се на држач места упише: „немају заједничких тачака“ (тј. $\alpha \cap \beta = \varnothing$). Међутим, постоји доста разлога да се тачним одговором сматра само када се на држач места упише „немају заједничких тачака или су им све тачке заједничке“ (тј. $\alpha \cap \beta = \varnothing \lor \alpha = \beta$).

Или (8.61):

Једначина равни која пролази кроз тачку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормална је на вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, гласи ____________________ .

Најчешће се држач места, ради тачног одговора, попуњава са „$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$“ (тј. узима се да је (x, y, z) текућа (произвољна) тачка посматране равни), али зашто не и са, на пример „$A(u-x_0) + B(v-y_0) + C(w-z_0) = 0$“ (где је текућа тачка означена са (u, v, w), што, свакако, може).

Закључна разматрања

Слаба тачка овог нашег полупрограмираног проверавања знања (у универзитетској настави) је што се негде (намерно или не) могу користити таутологије $p \implies p$ и $p \iff p$, и тако добити тачни одговори, који се уз коректно објашњење морају прихватити.

При дозвољеној литератури на испитивању постоји могућност преузимања комплетних одговора из књига, са више или мање успеха. Томе се може, бар делимично, „доскочити“ променом ознака у односу на оне које се налазе у доступној литератури, што онемогућава преписивање (преузимање) читавих блокова из коришћене литературе. То се може практиковати и код класично формулисаних питања и задатака при проверавањима знања.

Што се тиче могућности да се напамет „науче“ сви тестови из књиге и њихови тачни одговори (решења), тај проблем се може превазићи попуњавањем постојећих празнина и отварањем празнина на новим местима или извесним прекомпоновањем постојећих тест-питања (задатака).

После извесног увежбавања одговора (решавања) на тест-питања (задатка) и уз извесну „наклоност" математици, кандидати су у стању да дају мање очекиване и нестандардне (тачне) одговоре. У том смислу, од таквих кандидата може се реално очекивати да из $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ „намерно" изведу духовит закључак $\lim\limits_{n\to\infty} |-a_n| = |-a|$ $(= |a|)$, или $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{1}{2}a_n| = |\frac{1}{2}a|$ $(= \frac{1}{2}|a|)$, ... (уместо стандардног и очекиваног $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$). Уколико неко још „каже" да обрнуто не важи и то још „документује" конкретним примером, такав одговор се свакако мора више вредновати.

Напоменимо такође да одговори (решења) на тест-питања (задатака) нису баш тако једноставни, као што можда изгледа, односно да се не може на њима успети и без знања (учења), што смо раније већ напоменули. Треба такође бити веома обазрив и суптилан у (не)прихватању тачности одговора. Наиме, у досадашњој пракси наилазили смо на примере прихватања (неприхватања) нетачних (тачних) одговора при прегледању радова кандидата. Но, и упркос томе, ми бисмо дали извесну предност полупрограмираним тест-питањима (задацима) у односу на тест-питања (задатке) где је понуђено више одговора, од којих је само један тачан. Јер, у овом другом случају може се помало у недостатку времена или знања „играти на срећу", а то није баш много у складу са природом и суштином математике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Webb, N. L., *Assessment of Students Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory*, in: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York 1992, pp. 661–683.

[2] Марјановић, М., *Методика математике, други део*, Учитељски факултет, Београд 1996.

[3] Haaser, N. B., La Salle, J. P., Sullivan, J. A., *Introduction to Analysis, vol. I*, Ginn and Company 1959.