НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛТЕТИМА

др **Новица Блажић**

ПРИМЕР КОРИШЋЕЊА ВЕКТОРА

1. Увод

Важан проблем геометрије је разумевање простора. Настава аналитичке геометрије пружа широке могућности да се код студената и ученика развије осећај за простор користећи векторски и аналитички апарат. У ту сврху користио сам необавезне, интересантне задатке који могу помоћи студентима и напреднијим средњошколцима да самостално дођу до важних идеја, појмова и тврђења.

У раду се наводе искуства и идеје до којих је дошло неколико генерација студената решавајући следећи задатак Н. Б. Василева (објављен у Кванту, М119, 12/1971).

Задатак 1. Нека је дат полиедар P. Свакој његовој страни се придружује вектор, нормалан на страну, дужине једнаке површини стране и усмерен споља. Одредити збир свих таквих вектора.

Истовремено, студентима је био понуђен следећи сличан задатак у равни.

Задатак 2. Нека је дат конвексан раван полигон П. Свакој његовој страни се придружује вектор нормалан на ту страну, усмерен споља и дужине једнаке дужини те стране. Одредити збир свих таквих вектора.

Слика 1. Полиедар P, полигон П и придружени вектори

Решавајући наведени задатак, његове специјалне случајеве и дводимензиони аналогон, студенти и ђаци могу самостално доћи до следећих идеја, појмова и веза:

- *разлагање полиедра и полигона на тетрадре и троуглове,*
- *примене векторског производа,*
- *везе између вектора и њихових нормалних пројекција,*
- *веза између површине полигона и његове нормалне пројекције,*
- *веза између ротације и вектора (линеарно пресликавање),*
- *могућност да се дводимензиони проблем реши посматрањем одговарајућег тродимензионог проблема.*

Овај проблем је погодан и за рад са напреднијим средњошколцима. Погодним избором задатака и примера ђаци и студенти се могу навести да самостално дођу и до других важних идеја и појмова.

2. Начини решавања

Најкраћи начин за решавање овог задатка се заснива на следећој физичкој интерпретацији. Посматрајмо у неком хомогеном флуиду део тог флуида који има форму задатог полиедра. Притисак флуида на страну тог полиедра пропорционалан је површини и усмерен нормално на страну. Укупан притисак је управо одређен збиром свих таквих вектора. Како из искуства знамо да се тај полиедар у флуиду не би кретао, закључујемо да је резултујућа сила, односно збир тих вектора једнак $\vec{0}$.

Наведимо сада две „математичке“ идеје које се могу користити за решавање овог задатка. Једна идеја се заснива на разлагању полиедра на тетраедре (решење објављено у Кванту, 8/1972). Други начин је везан за посматрање свих могућих пројекција траженог збира вектора. Други задатак се може једноставно решити и употребом ротације. У наредним одељцима се наводе детаљи одговарајућих решења.

Примедба. Пре него што пређемо на решавање задатака, потпуности и прецизности ради, дефинишимо вектор. *Вектор* је класа еквиваленције у односу на следећу релацију дефинисану на скупу уређених парова тачака. Парови (A,B) и (A_1,B_1) су еквивалентни ако и само ако дужи AB_1 и BA_1 имају заједничко средиште.

Приметимо најпре да је за произвољан паралелепипед тражени збир $\vec{0}$ те се показује да то важи и у општем случају.

3. Метода разлагања

Нека S_i, $i=1,\dots,n$, означавају стране полиедра P, $\vec{v}_i$ означавају одговарајуће векторе, а $\overrightarrow{\Sigma}_P$ збир свих вектора $\vec{v}_i$, $\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i$. Разложимо сада полиедар P на унију тетраедара T_α, $\alpha=1,\dots,k$ тако да произвољна два тетраедра су дисјунктна или имају заједничку страну, ивицу или врх полиедра.

Слика 2. Разлагање полиедра на тетраедре

На пример (слика 2), тространа призма се разлаже на три тетраедра а произвољан конвексан полиедар се најпре разлаже на пирамиде а оне даље на тетраедре. Сада се странама произвољног тетраедра T_α додели одговарајући вектор и њихов збир се означава са $\overrightarrow{\Sigma}_{T_\alpha}$. Покажимо да се тај збир увек анулира.

Лема 1. *Нека је T тетраедар. Тада је $\overrightarrow{\Sigma}_T = 0$.*

Доказ. Означимо темена тетраедра T са O, A, B, C и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Користећи дефиницију векторског производа добијамо

$$\overrightarrow{\Sigma}_T = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}).$$

Због дистрибутивности векторског множења према сабирању вектора је

$$\overrightarrow{\Sigma}_T = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0},$$

што је и требало проверити у Леми 1. ∎

Слика 3. Тетраедар $OABC$ Слика 4. Заједничка унутрашња страна тетраедара

Решење Задатка 1 сада следи из чињенице да је збир вектора који одговарају свим тетраедрима једнак полазном збиру $\overrightarrow{\Sigma}_P$,

$$\overrightarrow{\Sigma}_P = \sum_{\alpha=1}^{k} \overrightarrow{\Sigma}_{T_\alpha} = \vec{0}.$$

Ова формула следи из следеће анализе. Страна тетраедра из разлагања мора лежати на граници полиедра P или у његовој унутрашњости. Ако је у његовој унутрашњости, онда је она заједничка за тачно два тетредра те су њој одговарајући вектори супротни, слика 4.

Стране тетраедра које леже на граници полиедра, припадају некој од страна полиедра, на пример S_i. Свака таква страна припада тачно једном тетраедру и збир њима одговарајућих вектора је једнак вектору стране S_i, то јест $\vec{v}_i = \vec{u}_{\alpha_1} + \cdots + \vec{u}_{\alpha_l}$, (видети слику 5).

Тиме је доказано да је збир свих придружених вектора једнак $\vec{0}$. ∎

Слика 5. Разлагање страна тетраедра Слика 6. Призма придружена полигону

Једна од могућности за решавање Задатка 2 је да се искористи претходни резултат односно да се полигону Π придружи полиедар P на једноставан начин.

Решење задатка 2. Придружимо полигону Π призму P чија је база Π а изводница нормална на Π и јединичне дужине (слика 6).

На основу Задатка 1 збир свих придружених вектора је $\vec{0}$. Приметимо да се вектори који одговарају основама поништавају а вектори бочних страна призме P се поклапају са векторима придруженим странама полигона Π, што даје резултат. ■

Примедба. За примену прве методе (разлагање) претпоставка о конвексности није неопходна. Она се користи у наредном решењу. Овде је довољно захтевати да је гранична полиедарска површ оријентабилна, односно да допушта разлагање на конвексне полиедре.

4. Метода пројектовања

Други начин да се реши задатак се заснива на пројектовању вектора $\overrightarrow{\Sigma}_P$ и $\overrightarrow{\Sigma}_\Pi$ на призвољну праву. Овде ћемо најпре решити други задатак.

Друго решење Задатка 2. Изаберимо у равни полигона Π нормалне праве l и k и на њима редом јединичне векторе $\vec{e}$ и $\vec{n}$ (изабране тако да $(\vec{e},\vec{n})$ има исту оријентацију као и $(\vec{v}_i,\vec{a}_i)$).

Слика 7. Пројектовање на праве l и k Слика 8. Пројекција полигона на раван

Показује се да је пројекција вектора $\overrightarrow{\Sigma}_\Pi$ на осу l једнака $\vec{0}$. Означимо са $\vec{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, вектор стране полигона Π, а са $\vec{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, придружени вектор и $\overrightarrow{\Sigma}_\Pi = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{v}_i$.

Подсетимо се сада основних особина пројектовања вектора на осу. Означимо са Pr_l нормалну пројекцију вектора из равни на праву l. Наведимо два важна својства пројектовања (без доказа) у облику следеће леме.

Лема 2. *За произвољне векторе* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и праву* l *је*

(i) $\mathrm{Pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Pr}_l\,\vec{a} + \mathrm{Pr}_l\,\vec{b}$,

(ii) $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{e},\vec{a})\vec{e}$. ■

Тада је

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}_l\,\overrightarrow{\Sigma}_\Pi &= \mathrm{Pr}_l(\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_n) = \mathrm{Pr}_l\,\vec{v}_1+\cdots+\mathrm{Pr}_l\,\vec{v}_n \\ &= (|\vec{v}_1|\cos\phi_1+\cdots+|\vec{v}_n|\cos\phi_n)\vec{e},\end{aligned} \tag{1}$$

где је ϕ_i угао између вектора $\vec{v}_i$ и $\vec{e}$. Приметимо да је ϕ_i истовремено угао између вектора $\vec{a}_i$ и $\vec{n}$. Како вектори $\vec{a}_i$ одређују полигон, то је $\vec{a}_i+\cdots+\vec{a}_n=\vec{0}$, односно

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \mathrm{Pr}_k(\vec{a}_1+\cdots+\vec{a}_n) = \mathrm{Pr}_k\,\vec{a}_1+\cdots+\mathrm{Pr}_k\,\vec{a}_n \\ &= (|\vec{a}_1|\cos\phi_1+\cdots+|\vec{a}_n|\cos\phi_n)\vec{n}.\end{aligned} \tag{2}$$

Како су $\vec{a}_i$ и $\vec{v}_i$ вектори истих дужина, то из (2) и (1) следи $\mathrm{Pr}_l\,\overrightarrow{\Sigma}_\Pi=\vec{0}$ за произвољну праву l, а одатле следи да је $\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_n=\vec{0}$. ■

Слична идеја се може искористити и за произвољан конвексан полиедар.

Решење Задатка 1. Нека је l произвољна права у простору и $\vec{e}$ јединични вектор са праве l. Такође, нека је π раван нормална на l. Бира се оријентација равни π тако да $\vec{e}$ са изабраном оријентацијом за π даје оријентацију целог простора. Као и у претходном случају је

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}_l\,\overrightarrow{\Sigma}_\Pi &= \mathrm{Pr}_l(\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_n) = \mathrm{Pr}_l\,\vec{v}_1+\cdots+\mathrm{Pr}_l\,\vec{v}_n \\ &= (|\vec{v}_1|\cos\phi_1+\cdots+|\vec{v}_n|\cos\phi_n)\vec{e}.\end{aligned}$$

С друге стране, истовремено се страна полиедра S_i нормално пројектује на полигон F_i у равни π.

Важно је приметити да је

$$\text{Површина}(F_i) = \text{Површина}(S_i)|\cos\phi_i|.$$

Посматрајмо сада пресликавање Pr_π које оријентисане полигоне из простора нормално пројектује на раван π при чему је

$$\mathrm{Pr}_\pi\,S_i = \pm\text{Површина}(F_i) = \text{Површина}(S_i)\cos\phi_i, \tag{3}$$

где се знак $+$ бира ако је угао између $\vec{v}_i$ и $\vec{e}$ оштар и знак $-$ у супротном случају. Када пројектовање Pr_π применимо на целу полиедарску површ добијамо

$$\mathrm{Pr}_\pi(S_1)+\cdots+\mathrm{Pr}_\pi(S_n) = 0, \tag{4}$$

јер пројекција полиедра одређује конвексан полигон у равни π такав да се на сваку тачку из унутрашњости пројектују тачно две тачке са полиедарске површи, а њима одговарајуће стране полиедра се пројекцијом Pr_π сликају у супротне бројеве.

Слика 9. Пројектовање полиедра на раван Слика 10. Ротација и сабирање вектора

Ако применимо (3), из формуле (4) добијамо

$$\text{Површина}(S_1)\cos\phi_1 + \cdots + \text{Површина}(S_n)\cos\phi_n = 0.$$

С обзиром да је Површина$(S_i) = |\vec{v}_i|$ следи решење Задатка 1. ■

Примедба. У првом решењу (метода разлагања) пројектовање се не користи директно. Али приметимо да и иза тог решења се налази пројектовање. Користи се за доказивање дистрибутивности векторског множења према сабирању вектора.

5. Линеарна пресликавања

Задатак 2 може помоћи да приликом увођења појма вектора студенти самостално, користећи елементарну геометрију, дођу до линеарних пресликавања и њихове улоге у геометрији. То се илуструје следећим решењем.

Треће решење Задатка 2. Означимо са $\mathcal{R}$ ротацију вектора равни за прав угао, $\mathcal{R}\colon \mathcal{V}^2 \longrightarrow \mathcal{V}^2$. Овде $\mathcal{V}^2$ означава скуп вектора у равни. Користећи елементарну геометрију, подударност, једноставно се проверава да се ротација слаже са сабирањем вектора, односно

$$\mathcal{R}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathcal{R}(\vec{a}) + \mathcal{R}(\vec{b})$$

за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (слика 10).

Како је због претпоставки Задатка 2. $\mathcal{R}(\vec{a}_i) = \vec{v}_i$, због (7) се тврђење задатка добија применом ротације $\mathcal{R}$ на збир

$$\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n = \vec{0}.$$