др Ратко Тошић, др Павле Младеновић

40. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Јубиларна, 40. међународна математичка олимпијада (ММО) одржана је у Букурешту у времену од 10. до 22. јула 1999. године. На овогодишњој Олимпијади учествовале су шесточлане екипе из 81 земље са свих континената. Екипу Југославије сачињавало је шест ученика четвртог разреда Математичке гимназије у Београду. Сви су освојили медаље, и то Душан Ђукић златну, Предраг Глишић и Иван Матић сребрне, а Раде Станојевић, Исидора Милин и Никола Петровић бронзане. У незваничном екипном пласману наш тим је ове године заузео четрнаесто место, што је у конкуренцији 81 екипе веома солидан пласман. Највише успеха имали су такмичари Кине и Русије.

Опширнији текст о 40. међународној олимпијади биће објављен у првом овогодишњем броју часописа ТАНГЕНТА.

Задаци

1. Одредити све коначне скупове S тачака у равни, које садрже бар три тачке и задовољавају следећи услов: за сваке две различите тачке A и B из S, симетрала дужи AB је оса симетрије скупа S. *Естонија*

2. Нека је n фиксиран цео број такав да је $n \geqslant 2$.

(а) Одредити најмању константу C, тако да неједнакост

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2)^2 \leqslant C\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)^4$$

важи за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(б) За ту константу C одредити када важи једнакост. *Пољска*

3. Дата је квадратна табла $n\times n$, где је n фиксиран паран позитиван цео број. Табла је подељена на n^2 јединичних квадрата. Два различита јединична квадрата на табли су *суседна* ако имају заједничку страницу.

Означено је N јединичних квадрата тако да је сваки јединични квадрат (означен или неозначен) суседан са бар једним означеним квадратом.

Одредити најмању могућу вредност броја N. *Белорусија*

4. Одредити све парове (n,p) позитивних целих бројева за које важи:
p је прост број, $n \leqslant 2p$ и број $(p-1)^n+1$ је дељив са n^{p-1}. *Тајван*

5. Две кружнице Γ_1 и Γ_2 налазе се унутар кружнице Γ и додирују Γ у различитим тачкама M и N, редом. Кружница Γ_1 пролази кроз центар кружнице

Γ_2. Права која садржи две тачке пресека кружница Γ_1 и Γ_2 сече Γ у тачкама A и B. Праве MA и MB секу Γ_1 у C и D, редом.

Доказати да је права CD тангента кружнице Γ_2. *Русија*

6. Одредити све функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такве да је

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

за све $x, y \in \mathbf{R}$. *Јапан*

Решења задатака

1. За произвољне тачке P и Q означимо са $\mathcal{S}_{PQ}$ симетрију у односу на симетралу дужи PQ. Нека је S коначан скуп тачака у равни који садржи бар три тачке и задовољава дати услов и нека је T тежиште скупа S. За произвољне две различите тачке $A, B \in S$ важи $\mathcal{S}_{AB}(S) = S$. Одатле следи да је и $\mathcal{S}_{AB}(T) = T$ и $TA = TB$. Према томе, све тачке скупа S припадају кружници са центром T и представљају темена конвексног полигона, рецимо $A_1A_2\dots A_n$. Симетрија у односу на симетралу дужи A_1A_3 пресликава сваку од две полуравни чија је граница права A_1A_3 у себе. Нека је α она од тих полуравни која садржи теме A_2. С обзиром да полураван α не садржи ниједно друго теме n-тоугла $A_1A_2\dots A_n$ (осим A_1, A_3 и A_2), и важи $\mathcal{S}_{A_1A_3}(A_1) = A_3$, то је $\mathcal{S}_{A_1A_3}(A_2) = A_2$. Одатле следи да је $A_1A_2 = A_2A_3$. Аналогно добијамо једнакости $A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_nA_1$ и како темена полигона $A_1A_2\dots A_n$ припадају једној кружници, то је тај полигон правилан. Лако се проверава да скуп који се састоји од темена правилног полигона задовољава дати услов.

2. Дата неједнакост је хомогена и симетрична по променљивим $x_1, \dots, x_n$. Према томе, без смањења општости разматрања можемо претпоставити да је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 1$. У овом случају треба максимизовати збир

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

За $n = 2$ добијамо да је $x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) \leqslant \dfrac{1}{2}(2x_1x_2)(1 - 2x_1x_2) \leqslant \dfrac{1}{8}$, при чему једнакост важи ако је $2x_1x_2 = 1/2$, тј. $x_1 = x_2 = 1/2$.

Нека је $n \geqslant 3$ и x_{k+1} последња у низу променљивих $x_1, \dots, x_n$ која је различита од нуле. Означимо $X = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$ и $Y = (x_1, \dots, x_k + x_{k+1}, 0, 0, \dots, 0)$. Доказаћемо да је $F(Y) \geqslant F(X)$. Размотримо разлику

$$\begin{aligned}(1)\qquad F(Y) - F(X) &= x_k x_{k+1}\left\{3(x_k + x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2\right\}\\ &= x_k x_{k+1}\left\{3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2\right\}\\ &= x_k x_{k+1}\left\{(x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_k x_{k+1}\right\}.\end{aligned}$$

Из неједнакости $1 \geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \dfrac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$ добијамо да је $\dfrac{2}{3} \geqslant x_k + x_{k+1}$, па даље из (1) следи $F(Y) - F(X) \geqslant 0$. Примењујући наведену смену неколико пута добијамо да је

$$\begin{aligned} F(x_1,\dots,x_n) &\leqslant F(a,b,0,\dots,0) = ab(a^2+b^2) \\ &= \frac{1}{2}(2ab)(1-2ab) \leqslant \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\dots,0\right). \end{aligned}$$

Према томе тражена константа је $C = 1/8$, а једнакост се достиже ако и само ако су $n-2$ од бројева $x_1, \dots, x_n$ једнаки нули, а преостала два су међусобно једнака (није искључен случај да су и они једнаки нули).

3. Обојимо поља (јединичне квадрате) наизменично бело и црно као на шаховској табли, тако да је доње лево поље црно, сл. 1.

Сл. 1 Сл. 2

Нека је x_n тражени најмањи број, b_n најмањи број белих поља која морају бити означена тако да свако црно поље има бар једно означено суседно бело поље и, слично, нека је c_n најмањи број црних поља која морају бити означена тако да свако бело поље има бар једно означено суседно црно поље. С обзиром да је $n = 2k$, за неки природан број k, то на табли има једнак број белих и црних поља, па због симетрије табле, лако закључујемо да је $b_n = c_n$ и $x_n = b_n + c_n$.

Уочимо беле дијагонале које су „паралелне“ великој црној дијагонали. Нумеришимо те дијагонале бројевима 1, 2, $\dots$, $2k$. У пољима дијагонала које су означене бројевима 2, 4, $\dots$, $2k$ означимо редом 2, 4, $\dots$, k, $\dots$, 3, 1 поља, тако да никоја два означена поља немају заједничко теме (видети слику 1, где је представљен случај $k = 5$). При томе је свако црно поље суседно тачно једном означеном белом пољу. Број означених белих поља у овом примеру једнак је

$$2+4+\dots+k+\dots+3+1 = \frac{k(k+1)}{2},$$

одакле закључујемо да важи неједнакост

$$b_n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}. \tag{2}$$

Даље, лако је приметити да у наведеном примеру не постоји црно поље које је суседно са нека два означена бела поља. Према томе, неопходно је означити бар

$k(k+1)/2$ црних поља, тако да за свако бело поље постоји означено црно поље, тј.

(3) $$c_n \geqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Из неједнакости (2) и (3) и чињенице да је $b_n = c_n$, добијамо да је $b_n = c_n = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Коначно: $x_n = b_n + c_n = k(k+1)$.

4. Очигледно је да сваки пар $(1,p)$, где је p прост број, задовољава услове задатка. Пар $(2,2)$ је такође решење. Ако је $n = 2$ и $p > 2$, онда је p непаран број, па следи да је и $(p-1)^n + 1$ такође непаран број који није дељив са 2^{p-1}. Приметимо још да број $(2-1)^n + 1 = 2$ није дељив са n ни за једно $n \geqslant 3$.

Преостаје још да потражимо решења (n,p) за која важи $n \geqslant 3$ и $p \geqslant 3$. Прво ћемо доказати да је у том случају број n дељив са p и да је $n < 2p$, одакле следи и $n = p$. Заиста, ако је $p \geqslant 3$, онда је $(p-1)^n + 1$ непаран број. Зато је и његов делилац n непаран, па због услова $n \leqslant 2p$ добијамо да је $n < 2p$. Означимо са q најмањи прост делилац броја n. Из услова $q \mid (p-1)^n+1$ добијамо $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q$, а бројеви q и $p-1$ су узајамно прости. Приметимо да је број $p-1$ паран, па q мора бити непаран. Како је q најмањи прост делилац броја n, то су и бројеви n и $q-1$ узајамно прости, а одатле следи да постоје цели бројеви u и v за које важи $un + v(q-1) = 1$. Из ове једнакости добијамо да је u непаран број, јер је $q-1$ паран. Зато важе следеће конгруенције

$$p - 1 = (p-1)^{un} \cdot (p-1)^{v(q-1)} \equiv (-1)^u \cdot 1^v \equiv -1 \pmod q,$$

одакле следи да је број p дељив са q, па је $p = q$. Како је q најмањи прост делилац броја n, то број 2 није делилац броја n. Према томе, n је дељив са $q = p$ и $n \neq 2p$.

Коначно, из услова

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1 = p^2\left\{p^{p-2} - \binom{p}{1}p^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-3}p - \binom{p}{p-2} + 1\right\},$$

добијамо да је $p - 1 = 2$, тј. $p = 3$, јер су сви сабирци у великој загради осим последњег дељиви са p. Тако смо добили и решење $(3,3)$.

Сви тражени парови су: $(1,p)$, где је p произвољан прост број, (2,2) и (3,3).

5. (Решење *Душана Ђукића*) Нека су P и Q тачке пресека кружница Γ_1 и Γ_2, а R тачка пресека правих PQ и O_1O_2. Нека је $H_{M,r/r_1}$ хомотетија са центром M и коефицијентом r/r_1. Очигледно је $H_{M,r/r_1}(\Gamma_1) = \Gamma$. Како се при тој хомотетији тачке C и D пресликавају редом у A и B, то важи

$$\frac{MC}{MA} = \frac{MD}{MB} = \frac{r}{r_1}, \qquad CD \parallel AB.$$

За доказ чињенице да је права CD тангента круга Γ_2, довољно је доказати да је растојање тачке O_2 од праве CD једнако полупречнику r_2, тј. $d(O_2, CD) = r_2$.

Одредимо прво растојање тачке M од праве AB. Коришћењем косинусне теореме добијамо следеће једнакости (видети слику 2):

$$\begin{aligned} d(M,AB) &= d(O_1,AB) - O_1M\cos\angle O_2O_1M \\ &= O_1O_2 - RO_2 + O_1M\cos\angle OO_1O_2 \\ &= r_1 - r_2\cos\angle O_1O_2P + r_1\cos\angle OO_1O_2 \\ &= r_1 - r_2\frac{r_1^2+r_2^2-r_1^2}{2r_1r_2} + r_1\frac{(r-r_1)^2+r_1^2-(r-r_2)^2}{2r_1(r-r_1)} \\ &= r_1 - \frac{r_2^2}{2r_1} + \frac{2r_1^2-2rr_1+2rr_2-r_2^2}{2(r-r_1)} = \frac{rr_2(2r_1-r_2)}{2r_1(r-r_1)}. \end{aligned}$$

Даље добијамо растојање правих CD и AB:

$$d(C,AB) = \frac{r-r_1}{r}d(M,AB) = \frac{r_2(2r_1-r_2)}{2r_1} = r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1}$$

и коначно

$$d(O_2,CD) = d(C,AB) + RO_2 = r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} + \frac{r_2^2}{2r_1} = r_2.$$

6. Означимо $c = f(0)$ и $A = \{f(x) : x \in R\}$. Стављајући $x = y = 0$ добијамо да је $f(-c) = f(c) + c - 1$, одакле следи да је $c \neq 0$. Лако се одређује рестрикција функције f на скуп A. Заиста, за свако $x = f(y) \in A$ добијамо да је $f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$, тј.

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}. \tag{4}$$

Даље, за $y = 0$ добијамо да је $f(x-c) - f(x) = cx + f(c) - 1$. Како је $c \neq 0$, то из последње једнакости добијамо да је скуп $\{f(x-c) - f(x) : x \in R\}$ једнак скупу R свих реалних бројева, тј. $A - A = \{y_1 - y_2 : y_1, y_2 \in R\} = R$.

Сада је лако одредити вредност $f(x)$ за произвољан аргумент $x \in R$. Изаберимо бројеве y_1 и y_2 из R тако да важи $x = y_1 - y_2$. Користећи дату једначину и једнакост (4) добијамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1-y_2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{(y_1-y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (4) и (5) добијамо да је $c = 1$, тј.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \text{за све } x \in R. \tag{6}$$

Лако се проверава да функција (6) задовољава дату функционалну једначину. Према томе, функција дата са (8) је једино решење.