др Ариф Золић

РЈЕШАВАЊЕ ЈЕДНЕ КЛАСЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

0. На класификационом испиту из математике за упис на техничке факултете, Математички и физички факултет и Факултет за физичку хемију Универзитета у Београду[1] један од двадесет задатака је био:

20. *Број рјешења једначине* $2\cos^2\dfrac{x^2+x}{3}=3^x+3^{-x}$ *је*:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) већи од 3; N) не знам.

Као што је познато, један и само један од понуђених одговора (A, B, C, D или E) је тачан. Заокруживање тачног одговора доноси 8 поена, а заокруживање погрешног одговора доноси -10% од броја поена за тачан одговор, дакле, $-0{,}8$ поена. Један негативан поен се добија ако се заокружи више од једног одговора као и у случају незаокруживања ниједног одговора.

Због природе испита није добијена потпуна информација о томе како су кандидати рјешавали овај задатак (а и друге задатке), али, с обзиром да је тачан одговор заокружила приближно трећина кандидата, с великом поузданошћу можемо закључити да је овај задатак представљао озбиљан проблем кандидатима. Како је врло вјероватан разлог то што је начин рјешавања овог и њему сличних задатака мало неуобичајен, у овом чланку управо желимо анализирати рјешавање таквих задатака. Ти задаци представљају једну класу трансцендентних једначина и неједначина. Поступак рјешавања се заснива на налажењу екстремних вриједности функција које фигуришу у једначинама, односно неједначинама. Најчешће је то и једини начин рјешавања.

1. Нека је дата једначина

$$f(x)=g(x), \tag{1}$$

гдје су $f(x)$ и $g(x)$ неке функције. Нека је бар једна од њих трансцендентна[2]. Нека је D_f област дефинисаности функције $f(x)$, а D_g област дефинисаности функције $g(x)$. Скуп $X=D_f\cap D_g$ је *област допустивих вриједности*[3] једначине (1). Ако је $X=\varnothing$, онда једначина (1) нема рјешења. Нека је $X\neq\varnothing$. Ако

[1] 01.07.1994. године

[2] Поступак се може примијенити и када ниједна од функција $f(x)$ и $g(x)$ није трансцендентна. Рјешавање таквих задатака је, по правилу, једноставније.

[3] Користи се и термин *област дефинисаности*.

постоји $x_r \in X$ за које је $\tau(f(x_r) = g(x_r)) = \top$, онда кажемо да је x_r рјешење једначине (1). Ријешити једначину (1) значи наћи сва њена рјешења или доказати да једначина (1) нема рјешења ако их заиста нема. Скуп свих рјешења једначине (1) означићемо са X_r. Јасно је да је $X_r \subset X$.

Нека једна од фуниција у једначини (1), на примјер $f(x)$, има максимум, тј. нека постоји вриједност $x_{\max} \in D_f$ за коју је $\max f(x) = f(x_{\max}) = f_{\max}$, а друга функција $g(x)$ има минимум, тј. нека постоји $x_{\min} \in D_g$ за коју је $\min g(x) = g(x_{\min}) = g_{\min}$. Размотрићемо слиједеће случајеве.

1.1. а) $f_{\max} = g_{\min}$ и $x_{\max} = x_{\min}$. Једначина (1) има рјешење $x = x_{\max} = x_{\min}$ (сл. 1.а)).

а) б)

Сл. 1

1.1. б) $f_{\max} = g_{\min}$ и $x_{\max} \neq x_{\min}$. Једначина (1) нема рјешења (сл. 1.б)).

Примјер 1. Ријешити једначину $2\cos^2 \dfrac{x^2+x}{3} = 3^x + 3^{-x}$.

Рјешење. Запишимо дату једначину на слиједећи начин

$$\cos^2 \frac{x^2+x}{3} = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}.$$

Функција $f(x) = \cos^2 \dfrac{x^2+x}{3}$ је дефинисана за свако $x \in (-\infty, \infty)$ и задовољава услов $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. $f(x) = 1$, тј. $\max f(x) = 1$, за $\dfrac{x^2+x}{3} = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Функција $g(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2} = \dfrac{e^{x\ln 3} + e^{-x\ln 3}}{2} = \operatorname{ch}(x\ln 3)$ је дефинисана за свако $x \in (-\infty, \infty)$ и задовољава услов $1 \leqslant g(x)$, при чему је $\min g(x) = 1$, за $x \ln 3 = 0$, односно за $x = 0$.

Како је у области допустивих вриједности дате једначине $X = D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$, $\max f(x) = 1 = \min g(x)$ једино за $x = 0$, то закључујемо да једначина има једно једино рјешење $x = 0$, тј. од понуђених одговора тачан је одговор под В). $\triangle$

Примјер 2. Ријешити једначину $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^2 2x$.

Рјешење. Функција $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ је дефинисана за свако $x \in (-\infty, \infty)$ и при томе је $\max f(x) = \max \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, дакле, $x_{\max} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $f_{\max} = \sqrt{2}$.

Функција $g(x) = \sqrt{2} + \sin^2 2x$ је дефинисана за свако $x \in (-\infty, \infty)$ и при томе је $\min g(x) = \min(\sqrt{2} + \sin^2 2x) = g\left(m\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, дакле, $x_{\min} = m\dfrac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, $g_{\min} = \sqrt{2}$.

Сада имамо $f_{\max} = \sqrt{2} = g_{\min}$. Из једнакости $x_{\max} = x_{\min}$, тј. из $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = m\dfrac{\pi}{2}$, добијамо $1 + 8k = 2m$, $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$. Добијена Диофантова једначина $2m - 8k = 1$, $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$, нема рјешења, тј. не може бити $x_{\max} = x_{\min}$, па дата једначина нема рјешења. $\triangle$

Примјер 3. Ријешити једначину $\log(x^2 - 5x) = \sqrt{9x - x^2 - 4}$.

Рјешење. Област дефинисаности функције $f(x) = \log(x^2 - 5x)$ је $D_f = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$, а област дефинисаности функције $g(x) = \sqrt{9x - x^2 - 4}$ је $D_g = [1/2, 4]$. Како је $X = D_f \cap D_g = \varnothing$, тј. како је област допустивих вриједности дате једначине празан скуп, то дата једначина нема рјешења. $\triangle$

2.1. а) $f_{\max} < g_{\min}$ и $x_{\max} = x_{\min}$. Једначина (1) нема рјешења (сл. 2.а)).

а) б) в)

Сл. 2

2.1. б) $f_{\max} < g_{\min}$ и $x_{\max} < x_{\min}$. Једначина (1) нема рјешења (сл. 2.б)).

2.1. в) $f_{\max} < g_{\min}$ и $x_{\max} > x_{\min}$. Једначина (1) нема рјешења (сл. 2.в)).

Примјер 4. Ријешити једначину[4] $\exp\dfrac{x-1}{x^2} = x^2 - 4x + 6$.

[4] Једноставности ради, пишемо $e^t = \exp(t)$

Рјешење. Функција $\exp\dfrac{x-1}{x^2}$ је дефинисана за свако $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ (за $x=0$ може се узети $\lim f(x) = +0 = f(0)$, када $x \to \pm 0$, тј. функција се може додефинисати у нули). $\max f(x) = f(2) = \exp(1/4) = 1{,}284\ldots$.

Функција $g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ је дефинисана за свако $x \in \mathbf{R}$. $\min g(x) = g(2) = 2$.

Како је $\max f(x) = f(2) = \exp(1/4) = 1{,}284\ldots < 2 = g(2) = \min g(x)$, то дата једначина нема рјешења, иако је $x_{\max} = 2 = x_{\min}$. $\triangle$

Примјер 5. Ријешити једначину $\exp(-(x-1)^2) = \ln(e^2 + x^2)$.

Рјешење. У овом случају $\max f(x) = \max\exp(-(x-1)^2) = f(1) = 1 < 2 = g(0) = \min\ln(e^2+x^2) = \min g(x)$. Једначина нема рјешења ($f_{\max} < g_{\min}$, $x_{\max} > x_{\min}$).

2.2. $f_{\max} > g_{\min}$. Једначина (1) може имати рјешења (сл. 3.а)), а може и немати рјешења (сл. 3.б)).

а) б)

Сл. 3

У овом случају, уопште говорећи, овим поступком није могуће ријешити једначину (1). Међутим, уз допунска испитивања особина функција $f(x)$ и $g(x)$ могуће је утврдити колико рјешења има једначина (1) и, што је врло важно, процијенити приближне вриједности рјешења. Ради тога треба посматрати изразе $f_{\max} - g(x_{\max})$ и $f(x_{\min}) - g_{\min}$. Овдје то нећемо разматрати. Том питању би требало дати више простора и користити другачији и сложенији математички апарат.

3. Покажимо како се изложеним поступком могу ријешити неке неједначине облика

$$f(x) < g(x) \qquad (\text{или } f(x) \leqslant g(x)). \tag{2}$$

Нека су области дефинисаности функција $f(x)$ и $g(x)$ редом D_f и D_g. *Област допустивих вриједности* неједначине (2) је скуп $X_n = D_f \cap D_g$. Скуп свих вриједности $x_{rn} \in X_n$ за које је $\tau(f(x_{rn}) < g(x_{rn})) = \top$ (или $\tau(f(x_{rn}) \leqslant g(x_{rn})) = \top$), у ознаци X_{rn}, је скуп свих рјешења неједначине (2). Јасно је да је $X_{rn} \subset X_n$.

Примјер 6. Ријешити неједначину

$$\sin x + \cos x < \sqrt{12 + 4x - x^2} - \sqrt{3 + 2x - x^2}.$$

Рјешење. Област дефинисаности функције $f(x) = \sin x + \cos x$ је $D_f = \{ x\,;\, -\infty < x < \infty \}$. Из услова $12 + 4x - x^2 = (x+2)(6-x) \geqslant 0$ и $3 + 2x - x^2 = (x+1)(3-x) \geqslant 0$ налазимо да је област дефинисаности функције $g(x) = \sqrt{12 + 4x - x^2} - \sqrt{3 + 2x - x^2}$, $D_g = [-2,6] \cap [-1,3] = [-1,3]$. Дакле, област допустивих вриједности задате неједначине је $X_n = D_f \cap D_g = \{ x\,;\, -1 \leqslant x \leqslant 3 \}$.

Како је $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, то је $\max_{-1\leqslant x\leqslant 3} f(x) = f(\pi/4) = \sqrt{2}$. Покажимо да је $g(x) > 0$ за $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Заиста, $\sqrt{12 + 4x - x^2} > \sqrt{3 + 2x - x^2}$ за $x \geqslant -4{,}5$. Због тога можемо посматрати функцију $g^2(x) = (\sqrt{12 + 4x - x^2} - \sqrt{3 + 2x - x^2})^2 = (\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)})^2 = (\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)})^2 + 3 \geqslant 3$. Дакле, $g^2(x) \geqslant 3$. Како је $g(x) > 0$, то је $g(x) \geqslant \sqrt{3}$, односно $\min_{-1\leqslant x\leqslant 3} g(x) = \sqrt{3}$. На основу свега закључујемо да је $\max f(x) = \sqrt{2} < \sqrt{3} = \min g(x)$, па је дата неједначина тачна за све допустиве вриједности, дакле за $-1 \leqslant x \leqslant 3$. $\triangle$

Примјер 7. Ријешити неједначину $\dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} \leqslant \sin\dfrac{\pi x}{4}$.

Рјешење. Функција $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ је дефинисана за свако $x \in (1,3)$, а функција $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ за свако $x \in (-\infty, \infty)$. Дакле, област допустивих вриједности дате неједначине је $X_n = \{ x\,;\, 1 < x < 3 \}$.

Функција $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}$ достиже минимум за $x = 2$ и при томе је $\min f(x) = f(2) = 1$.

Функција $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ достиже максимум за $\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, тј. за $x = 2 + 8k$, $k \in \mathbf{Z}$, и при томе је $\max g(x) = g(2+8k) = 1$. Једино $x = 2$ припада области X_n.

Имамо, дакле, $\min f(x) = f(2) = 1 = g(2) = \max g(x)$, тј. дата неједначина има једно једино рјешење $x = 2$ и тада се, заправо, своди на једнакост. $\triangle$

Наведимо неколико задатака:

1. $6\sin^6 x + 4\sin^4 x = -\sin^2 3x$.
2. $\cos x + \cos^2 2x + 2$.
3. $3\sin^2 x = -2x^2$.
4. $\cos(2m+1)x + \cos 2nx = -2$, $m, n \in \mathbf{Z}$.
5. $\sin 3x + \sin x = 2 + \cos^2 x$.
6. $\log(x-1) > \sqrt{2 - x - x^2}$.
7. $2\exp(-x^2) \leqslant \exp(x) + \exp(-x)$.