др Владимир Јанковић

НЕПРЕКИДНОСТ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ КОНВЕКСНИХ ФУНКЦИЈА

Конвексне функције се појављују у разним областима математике, како у оним које имају чисто теоријски карактер, тако и у оним које су мотивисане апликативним потребама. У традиционалној уџбеничкој литератури оне су веома слабо обрађене; најчешће се не иде даље од дефиниције конвексних функција и критеријума конвексности исказаних помоћу извода првог и другог реда. Елементарна питања везана за непрекидност и диференијабилност се уопште не разматрају. Циљ овог чланка је да се попуни та празнина.

Теореме које су непосредне последице претходних теорема дате су без доказа. Ставови од мањег значаја за концепцију формулисани су као задаци.

1. Појам конвексне функције

Нека је I интервал реалне праве и нека је f реална функција која је дефинисана на I. Ако је за $x, y \in I$ и $p, q \in \mathbf{R}$, који задовољавају услове $p, q \geqslant 0$ и $p+q=1$, задовољена неједнакост

$$f(px+qy) \leqslant pf(x)+qf(y), \tag{1}$$

за функцију f кажемо да је конвексна, а ако је задовољена неједнакост

$$f(px+qy) \geqslant pf(x)+qf(y), \tag{2}$$

за функцију f кажемо да је конкавна. Под претпоставкама које се односе на бројеве p и q, задовољене су неједнакости

$$\min\{x, y\} \leqslant px+qy \leqslant \max\{x, y\},$$

те стога интервал I заједно са тачкама x и y садржи и тачку $px+qy$. Ако је за $x, y \in I$ и $p, q \in R$, који задовољавају услове $x \neq y$, $p, q > 0$ и $p+q=1$, задовољена неједнакост

$$f(px+qy) < pf(x)+qf(y),$$

за функцију f кажемо да је строго конвексна, а ако је задовољена неједнакост

$$f(px+qy) > pf(x)+qf(y),$$

за функцију f кажемо да је строго конкавна. Ако је за $x, y \in I$ и $p, q \in \mathbf{R}$, $p, q \geqslant 0$ и $p + q = 1$, задовољена једнакост

$$f(px + qy) = pf(x) + qf(y),$$

за функцију f кажемо да је афина. Дакле, за функцију f кажемо да је афина уколико је конвексна и конкавна истовремено.

Задаци:

1. Доказати да строга конвексност (строга конкавност) повлачи конвексност (конкавност).

2. Доказати да је реална функција f, дефинисана на интервалу I, афина ако и само ако постоје $k, n \in \mathbf{R}$, такви да је $f(x) = kx + n$ за свако $x \in I$.

3. Нека је f конвексна функција дефинисана на интервалу $[a, b]$. Ако постоје $p, q \in \mathbf{R}$, такви да је $p, q > 0$, $p+q = 1$ и да је $f(pa+qb) = pf(a)+qf(b)$, доказати да је функција f афина.

4. Доказати да је конвексна функција f строго конвексна ако и само ако није афина ни на једном подинтервалу свога домена.

5. Доказати да је реална функција f, која је дефинисана на интервалу, конкавна (строго конкавна) ако и само ако је функција $-f$ конвексна (строго конвексна).

Нека је I интервал реалне праве и нека је f реална функција која је дефинисана на I. Под подељеном разликом функције f подразумевамо функцију

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}; \quad x, y \in I, x \neq y.$$

Очигледно је да је ова функција симетрична. Неопходни и довољни услови за монотоност функције преко подељене разлике формулисани су у Задатку 6 и лако се доказују:

Задатак 6. Нека је I интервал реалне праве и нека је f реална функција која је дефинисана на I. Доказати да је функција f опадајућа, растућа, строго опадајућа, строго растућа ако и само ако јој је подељена разлика мања или једнака од нуле, већа или једнака од нуле, мања од нуле, већа од нуле, респективно.

Неопходан и довољан услов за конвексноност функције преко подељене разлике дат је у следећој теореми:

Теорема 1. *Реална функција f дефинисана на интервалу I је конвексна ако и само ако је њена подељена разлика растућа функција по свакој својој промењљивој.*

Ова теорема је последица следеће леме:

Лема. *Реална функција f дефинисана на интервалу I је конвексна ако и само ако је једна од следећих неједнакости:*

a) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$,

b) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$,

c) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$,

задовољена за свако $x, y, z \in I$, $x < z < y$.

Доказ. Нека је функција f конвексна. Ако $x, y, z \in I$ задовољавају услов $x < z < y$, тада важи неједнакост

$$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y). \tag{3}$$

Заиста, $p = (y-z)/(y-x)$ и $q = (z-x)/(y-x)$ задовољавају услове $p, q > 0$, $p + q = 1$ и $px + qy = z$, па је неједнакост (3) последица неједнакости (1).

Важи и обратно тврђење: ако неједнакост (3) важи за $x, y, z \in I$, $x < z < y$, онда је функција f конвексна. Заиста, ако $x, y \in I$ и $p, q \in R$ задовољавају услове $x < y$, $p, q > 0$ и $p+q = 1$, онда за $z = px+qy$ важи $x < z < y$, $p = (y-z)/(y-x)$ и $q = (z-x)/(y-x)$, па је неједнакост (1) последица неједнакости (3).

Преостаје још да се покаже да је неједнакост (3) еквивалентна са сваком од неједнакости a), b) и c). Тај део доказа је једноставан, па ћемо га изоставити. ■

Задатак 7. Нека су I и J два интервала који имају бар две заједничке тачке и нека је реална функција f, која је дефинисана на $I \cup J$, конвексна на интервалима I и J. Доказати да је функција f конвексна на интервалу $I \cup J$.

2. Непрекидност конвексне функције

Теорема 2. *Конвексна функција f, која је дефинисана на отвореном интервалу I, задовољава Липшицов услов на сваком затвореном подинтервалу интервала I.*

Доказ. Нека је $[a, b] \subseteq I$. Постоје $A, B \in I$, такви да је $A < a < b < B$. Ако су $x, y \in [a, b]$, онда важи

$$\frac{f(a)-f(A)}{a-A} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(B)-f(b)}{B-b}.$$

Ако реалан број L задовољава неједнакости

$$-L \leqslant \frac{f(a)-f(A)}{a-A} \leqslant \frac{f(B)-f(b)}{B-b} \leqslant L,$$

онда је

$$|f(y)-f(x)| \leqslant L|y-x|, \quad x, y \in [a, b]. \quad ■$$

Теорема 3. *Конвексна функција f дефинисана на отвореном интервалу I је непрекидна.*

Теорема 4. *За конвексну функцију f, дефинисану на отвореном интервалу I, важи један од следећих услова:*

a) *Функција f је константна.*

b) *Функција f строго опада.*

c) *Функција f строго расте.*

d) *Постоји тачка $a \in I$ таква да функција f до тачке a строго опада, а од тачке a је константна.*

e) *Постоји тачка $b \in I$ таква да је функција f до тачке b константна, а од тачке b строго расте.*

f) *Постоје тачке $a, b \in I$, $a \leqslant b$, такве да функција f до тачке a строго опада, између тачака a и b је константна и од тачке b строго расте.*

Доказ. Ако је подељена разлика функције f увек једнака нули, онда је функција f константна (услов a)). Ако је подељена разлика функције f увек мања од нуле, онда је функција f строго опадајућа (услов b)). Ако је подељена разлика функције f увек већа од нуле, онда је функција f строго растућа (услов c)).

Нека је подељена разлика функције f увек мања или једнака од нуле, при чему она узима и вредност мању од нуле и вредност једнаку нули. Доказаћемо да је тада задовољен услов d). Постоје $a, b \in I$, $a < b$, такви да је $f(a) = f(b)(= C)$. Скуп $\{x \in I \mid f(x) = C\}$ је затворен и ограничен одоздо у I, па зато има минимум. Можемо претпостављати да је a најмања тачка овог скупа. Ако $x, y \in I$, $x < y \leqslant a$, онда је

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(a) - f(x)}{a - x} < 0.$$

Следи да је $f(y) > f(x)$. Према томе функција f строго опада до тачке a. Ако је $x \in I$, $a < x$, имамо да је

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \leqslant 0.$$

Следи да је $f(x) = C$. Према томе, функција f је константна десно од тачке a.

Нека је подељена разлика функције f увек већа или једнака од нуле, при чему она узима и вредност већу од нуле и вредност једнаку нули. На сличан начин као у претходном случају може да се докаже да је тада задовољен услов e).

Нека подељена разлика функције f узима и позитивне и негативне вредности. Доказаћемо да је тада задовољен услов f). Постоје $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in I$ такви да важи

$$\frac{f(\alpha) - f(\alpha')}{\alpha - \alpha'} < 0 < \frac{f(\beta) - f(\beta')}{\beta - \beta'}.$$

Можемо претпостављати да је $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. Како је, према Теореми 3, функција f непрекидна на интервалу $[\alpha, \beta]$, то она достиже минимум на том интервалу у некој тачки c. С обзиром да је $f(\alpha) > f(\alpha')$ и $f(\beta) > f(\beta')$, то је $\alpha < c < \beta$, и при томе је $f(c) < f(\alpha), f(\beta)$. Нека $x, y \in I$ задовољавају услов $x < y \leqslant c$. Постоји $z \in I$, такво да је $x, \alpha \leqslant z < c$. Имамо да је

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(c)-f(z)}{c-z} \leqslant 0.$$

На основу претходних разматрања (случајеви b) и d)), закључујемо да постоји $a \in I$, $a \leqslant c$, такво да функција f до тачке a строго опада, а на интервалу $[a, c]$ је константна. Нека $x, y \in I$ задовољавају услов $c \leqslant x < y$. Постоји $z \in I$, такво да је $c < z \leqslant y, \beta$. Имамо да је

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(z)-f(c)}{z-c} \geqslant 0.$$

На основу претходних разматрања (случајеви c) и e)), закључујемо да постоји $b \in I$, $b \geqslant c$, такво да је функција f на интервалу $[c, b]$ константна, а да од тачке b строго расте. ■

Теорема 5. *Конвексна функција f, дефинисана на интервалу (a, b), $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, има граничне вредности у тачкама a и b.*

Задатак 8. Нека је функција $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ конвексна на интервалу (a, b). Доказати да је f конвексна на интервалу $[a, b]$ ако и само ако њене граничне вредности у тачкама a и b задовољавају неједнакости

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant f(a), \quad \lim_{x\to b} f(x) \leqslant f(b).$$

3. Диференцијабилност конвексних функција

Теорема 6. *Конвексна функција f, дефинисана на отвореном интервалу I, има леви и десни извод у свакој тачки интервала I, и при томе важи*

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x), \quad x \in I.$$

Доказ. Нека је $x \in I$. Ако $y, z \in I$ задовољавају услов $y < x < z$, онда је

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Како је подељена разлика функције f растућа функција по свакој својој променљивој, то постоје коначни лимеси и задовољавају неједнакост

$$\lim_{z\to x-} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \lim_{y\to x+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}. \quad ■$$

Теорема 7. *За конвексну функцију f, дефинисану на отвореном интервалу I, важи:*

$$f'_+(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_-(y); \quad x, y \in I, x < y.$$

Доказ. Нека $x, y \in I$ задовољавају услов $x < y$ и нека је $x < z < y$. Како је

$$f'_+(x) = \lim_{z \to x+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \qquad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

то је

$$f'_+(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Друга неједнакост се доказује на сличан начин. ■

Теорема 8. *За конвексну функцију f, дефинисану на отвореном интервалу I, функције f'_- и f'_+ су растуће.*

Теорема 9. *Нека је f конвексна функција дефинисана на отвореном интервалу I. Ако је $x \in I$, онда је*

$$f'_-(x) = f'_-(x-) = f'_+(x-), \tag{4}$$

$$f'_+(x) = f'_-(x+) = f'_+(x+). \tag{5}$$

Доказ. Нека је $y \in I$, $x < y$. Из

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y)$$

граничним прелазом $y \to x+$ добијамо да је

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(x+) \leqslant f'_+(x+).$$

Нека $y, z \in I$, $x < y < z$. Тада је

$$f'_+(y) \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Граничним прелазом $y \to x+$ добијамо да је

$$f'_+(x+) \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

а одавде, граничним прелазом $z \to x+$ добијамо да је

$$f'_+(x+) \leqslant f'_+(x).$$

Из доказаних неједнакости следи (5). Једнакости (4) се доказују на сличан нацхин. ■

Теорема 10. *Нека је реална функција f, која је дефинисана на отвореном интервалу I реалне праве, конвексна. Ако је $x \in I$, онда су следећи услови еквивалентни:*

a) *Функција f је диференцијабилна у тачки x.*

b) *Функција f'_- је непрекидна у тачки x.*

c) *Функција f'_+ је непрекидна у тачки x.*

Теорема 11. *Конвексна функција f, дефинисана на отвореном интервалу I, је диференцијабилна у свим осим у највише пребројиво много тачака интервала I.*

Теорема 12. *Нека је f конвексна функција дефинисана на отвореном интервалу I. Ако је $[a, b] \subseteq I$, онда је*

$$\int_a^b f'_-(x) = \int_a^b f'_+(x) = f(b) - f(a). \tag{6}$$

Доказ. Функција f'_- је монотона на интервалу $[a, b]$, па је зато интеграбилна на том интервалу. Нека је $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ подела интервала $[a, b]$ и нека су s и S доња и горња интегрална сума функције f'_- у односу на ту поделу. тада је

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} f'_-(x_j)\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = f(b) - f(a),$$

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} f'_-(x_{j+1})\Delta x_j \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = f(b) - f(a).$$

Из неједнакости $s \leqslant f(b) - f(a) \leqslant S$ следи да је први од интеграла у (6) једнак прираштају функције f на интервалу $[a, b]$. На сличан начин може да се докаже да исто то важи и за други интеграл у (6). ■

Нека је реална функција f дефинисана на скупу $D \subseteq R$. Афина функција

$$A(x) = k(x - c) + f(c) \tag{7}$$

у тачки $c \in D$ узима исту вредност као и функција f. Рећи ћемо да је A афина функција ослонца функције f у тачки c уколико за свако $x \in D$ важи

$$f(x) \geqslant A(x). \tag{8}$$

Теорема 13. *Нека је f конвексна функција дефинисана на интервалу I. Тада је функција A дефинисана са (7) афина функција ослонца функције f у тачки $c \in \operatorname{int} I$ ако и само ако је $f'_-(c) \leqslant k \leqslant f'_+(c)$.*

Доказ. Нека је $f'_-(c) \leqslant k \leqslant f'_+(c)$. Ако је $x \in \operatorname{int} I$, онда за $x < c$ важи

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant f'_-(c) \leqslant k,$$

а за $x > c$ важи

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant f'_+(c) \geqslant k.$$

Горње две неједнакости повлаче да неједнакост (8) важи за $x \in \operatorname{int} I$, $x \neq c$. Ако је $x = c$ у (8) важи знак једнакости. Ако интервал I садржи неки од својих крајева, због непрекидности афине функције A и тврђења задатка 3, неједнакост (8) важи и у том крају.

Нека је A афина функција ослонца функције f у тачки c. Ако је $x \in I$, $x < c$, из неједнакости (8) следи да је

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant k,$$

одакле граничним прелазом $x \to c_-$ добијамо да је $f'_-(c) \leqslant k$. Ако је $x \in I$, $x > c$, из неједнакости (8) имамо да је

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant k,$$

па граничним прелазом $x \to c_+$ добијамо да је $f'_+(c) \geqslant k$. ∎

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts, A. W., Varberg, D. E., *Convex Functions*, Academic Press, New York and London, 1973.
2. Бурбаки, Н., *Функции дейтствительного переменного*, Наука, Москва, 1965.