НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2000, XLV, 1–2, стр. 1–8

др Милосав Марјановић

ОБНОВИТЕЉСКЕ ТЕМЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

1. Од самих почетака овог века испољавају се, на организовани начин тенденције усмерене ка реформи наставе математике у средњим школама. Првобитно, те тенденције могу се сврстати у следеће главне токове:

везивање наставе математике са математиком као науком, а из чега су резултирали у то време нови средњошколски предмети, као што су аналитичка геометрија и калкулус;

везивање теорије са применама, а посебно усклађивање наставе математике и физике и увођење елемената теорије вероватноће;

успостављање везе међу појединим математичким предметима, из чега је резултирао јединствени курс математике, посебно у млађим разредима;

измене метода излагања, истицањем предности интуитивно-логичког приступа, а потискивањем учења меморисањем и увежбавањем, уз залагање за конкретно-индуктивни у млађим разредима, и апстрактно-дедуктивни метод у старијим разредима;

изостављање „преживелих“ садржаја; увођење бифуркације, са различитим садржајима за све разгранатије типове средњих школа.

Најмаркантнија садржајна обнова била је увођење појма функције, не само тамо где се, као у калкулусу, јавља основним објектом, већ прожимањем тим појмом свих других садржаја школског курса математике. Као иницијатор ове обнове, Феликс Клајн на Хајделбершком конгресу 1904. године истиче „функцију као доминантни појам савремене математике“ и за њу везани образовни циљ „развијања функцијског мишљења“. И сад, скоро век потом, могло би се рећи да ни та велика тема још није у потпуности нашла своје право место, нарочито гледана распоређено уз друге конкретне садржаје.

1.1. Да бисмо сагледали обновитељску улогу коју је појам функције имао, довољно би било упоредити данашње уџбенике са оним из прошлог века. Потпуна поредба водила би нас у једно дуго излагање, па ћемо се овде ограничити на неке типичне аспекте.

Од времена вавилонских глинених таблета и Ахмесовог папируса вештина решавања једначина развијала се у посебну доктрину са све нејаснијим обрисима. Отварало се питање врсте проблема које ту треба укључити (сем класичног

Предавање одржано на семинару „Промјене у образовању“, Игало, 9–12. 01. 2000, који је организовало Министарство за просвјету Републике Српске.

случаја алгебарских једначина), а такође и питање метода решавања. Ово последње је нарочито актуализовано открићем немогућности решења у радикалим алгебарских једначина степена вишег од четири.

Рашчишћавање долази са општим појмом функције, те кад год је веза $y = f(x)$ прихватљива као функција, услов $f(x) = 0$ је прихватљив као једначина, а новији израз нула функције и архаичнији корен једначине добијају еквивалентно значење. Тиме се круг проблема изузетно проширује, а методе решавања све више темеље на испитивању тока функције и њеним тако добијеним својствима. Дакле, поменута доктрина не води ни до какве теорије једначина, већ се проблеми те врсте разбијају по другим областима математике (алгебарске једначине, тригонометријске једначине итд). Такође, имали бисмо сличан осврт говорећи о неједначинама и методама њиховог решавања.

Виетова словна алгебра (logistica speciosa) дуго је сматрана неутемељеном, а то утемељење тек је нашла у аксиомама алгебарских структура (уређених поља). Сличну судбину имала је и њена дидактичка трансформација која се данас, у нашим програмима, јавља као тема под насловом „алгебарски изрази“. Не много раније, ту тему су звали „општи бројеви“ (вероватно следећи идеју Виетових специја), а заиста се оперисало са њима по „правилима без резона“.

Практиковање процедуре да се за дати (алгебарски) израз $p(a,b,\dots)$ одређује његова бројевна вредност y, при датим вредностима променљивих a, b, $\dots$ није ништа друго доли истицање функције $y = p(a,b,\dots)$ у процедуралном облику без помињања ту, тог тако општег појма. Начини како оперишемо са изразима везују се спонтано са начинима операција са њиховим бројевним вредностима, тј. оперисања са бројевима. Збир или производ два израза следи идеју о збиру, односно производу две функције онако како се те операције са функцијама дефинишу тачка-по-тачка. И тај смисао формира се процедурално, а што значи кроз правилно вођене активности и не путем формалних дефиниција. Тако је, на пример, за ученика израз $2ab^2 + 3a^2b$ збир израза (монома), $A = 2ab^2$ и $B = 3a^2b$, а затим се $A + B$ доживљава као збир два неспецификована броја, и зато се, кад треба, може користити једнакост $A + B = B + A$, јер то ученик узима као правило размене места сабирака.

Чак би и то правило било „без резона“, ако би се наметало као словна једнакост. Зато то и таква правила морају се успоставити још у аритметици, радећи са посебним бројевима и као спољна истина везана за бројеве као опажајне појмове са значењем у окружујућој реалности. Коришћењем слова у тој раној настави развија се идеја о променљивој, тек са којом ће рад са изразима и касније, увођење појма функције бити школске теме са на време припремљеним смислом.

Постоји још један посебни вид у коме се јавља појам функције, а који се недовољно истиче (програмима и у настави). То је појам коначног низа, који може имати своје осмишљено место већ у старијим разредима основне школе. Наравно, цифарски записи природних бројева јесу такви примери, али многи комбинаторни задаци воде до ређања и других елемената који нису цифре. Истим скупом слова, рецимо са $\{а, н, с\}$, можемо написати различите речи као што су „сан“, „сана“, „ананас“ и многе друге (не тражећи њихово значење) и разликујући их по распореду слова и дужини. Задаци као што су налажење броја различитих речи дужине два, три, итд, написаних датим скупом слова, па исписивање свих тих речи у неком поретку и по некој процедури су инструктивне вежбе које не служе само као предигра за сложеније проблеме које касније садржи „комбинаторика“ као посебна тема.

Ми смо се ограничили да говоримо овде само о оним скривенијим ефектима које је имало уношења појма функције у школску наставу математике. Кроз дугогодишњу школску праксу, градуирањем и дидактичким обликовањем, ова обновитељска тема је, мање-више, ипак нашла своје право место и не представља озбиљнији проблем ни ученику ни предавачу.

2. Педестих година овог века јавља се нови тренд у обнови наставе математике, мотивисан радом на логичкој сређености и структурисаности саме математике као науке, а који нарочито интензивно почиње Дедекиндовом теоријом реалних бројева и издвајањем појма скупа као најопштијег у односу на остале појмове класичне математике. Кажимо описно шта под тим треба подразумевати. Ето, као што се некад на геометријске објекте почело гледати као да су састављени од тачака, од тада се на све математичке објекте почиње да гледа као да су састављени од елемената, који чине скуп, а елементи су међусобно организовани и ту организацију зовемо датом структуром. Тако скупови са задатом релацијом поретка примери су уређајних, са операцијом алгебарских, а са одстојањем метричких структура. Кад год уопштавамо, то радимо занемарујући нека својства, а кад код математичких објеката занемаримо сва структурна својства, остаће само аморфни скуп. У том смислу појам скупа и јесте општији од свих других појмова класичне математике. Даље, два истородна објекта за које постоји пресликавање једног у други које је *1–1* и *на* и које чува структуру (чува поредак, растојање или пролази кроз операцију) називају се изоморфним, а изоморфне објекте сматрамо есенцијално једнаким унутар дате теорије. Сагледавање математике на бази оваквих универзалних схема инспирисало је обновитељске идеје у универзитетској настави, а затим и средњошколској настави, одакле се све то рефлектовало и према основношколској настави. Појавиле су се нове велике теме „Теорија скупова“ и „Математичка логика“, обликоване према OECD-Synopses, 1961. Без довољно прожимања са традиционалним садржајима, уз у то време недовољно припремљеним предавачким кадром, ове нове теме су годинама биле велика мора и за ученике и за предаваче.

Многи од најистакнутијих математичара иступају против тог новог тренда, не залажући се за повратак на старо, већ отварајући питања мере и места тих нових садржаја. Издвојимо иступања Х. Фројдентала (H. Freudenthal) који је захтевао да нове садржаје прати и нова методика која би довела до праве дидактичке транспозиције тих тема, као и оштроумни критицизам Р. Тома (R. Thom) изречен на II међунардоном конгресу посвећеном настави математике, одржаном у Ексетеру (Енглеска) 1972. године, где он устаје против прераних генерализација и одвајања апстракција од конкретних садржаја[1]. Тај конгрес је имао

[1] Модерна математика – да ли постоји?, *Настава математике*, XXIII, 1 (1974), 27–38

преломну улогу и после њега нагло расте интерес за когнитивне процесе и нивое у настави одређене не само развојним факторима већ и анализом сазнајних процеса, а што наставу математике темељи шире од ослањања на саму математику као науку.

2.1. Тема „Скупови“ је распоређена програмима по свим разредима основне и средње школе. У почетку то су конкретни примери група материјалних објеката или сликама представљених знакова који служе да се за њих вежу идеје о почетним, природним бројевима. Касније се јављају примери са елементима који су синтактички знаци (слова, бројеви) или геометријске тачке. Сам појам скупа, као најопштији, има примере на свим нивоима апстрактности, почев од група материјалних објеката, па до случајева где су елементи класе еквиваленције оних објеката који су и сами математички појмови високог степена апстрактности.

У настави, имајући у виду да идеја о скупу претходи идеји о броју, испољавала се неразумна тенденција операсања са скуповима и обострано једнозначним кореспонденцијама, а тај екстремизам је понекад водио до „излагања“ о кардиналним бројевима и у нижим разредима основне школе иако све то није упрошћавало него, насупрот, оптерећивало је процесе учења.

Места где су садржаји ове теме имали значајне ефекте, вежу се за елементе комбинаторике и теорије вероватноће, као што год служе постепеном логичком сређивању, посебно где се говори о скуповима тачака истичући њихова карактеризирајућа својства. Генерално говорећи, ова тема је нашла своју праву меру у текућој школској настави, па ћемо се у овом излагању окренути следећој теми за коју се, нажалост, не би то исто могло рећи.

2.2. Логика се, експлицитно, јавља по први пут у настави математике у првом разреду средњих школа и то у виду једног сасвим издвојеног блока. Излагање обично тече врло елегантно. За исказ (или пропозицију) каже се да је тврђење које је тачно или лажно и не може истовремено бити и једно и друго. Изрази „тврђење“, „тачан“ и „лажан“ су примитивни појмови, односно њих не дефинишемо. Сложени искази, односно логички везници, дефинишу се добро познатим таблицама, у којима се истиносне вредности, неискусном читаоцу и посебно ученику, могу учинити произвољно одабране. То је нарочито случај са импликацијом, кад се тврђења као што су

$$2 > 5 \implies 1 > 5, \qquad 2 > 5 \implies 5 > 1$$

вреднују као тачна, а са позиције блаженог неискуства и без обзира на узраст, она се пре доживљавају као бесмислена.

Приметимо такође да кад таблице „преведемо“ на природни језик, тј. искажемо их реченицама, тада ће за исказе p и q:

(а) дисјункција бити тачна кад су p *или* q тачни искази,

(б) конјункција бити тачна само кад су p *и* q тачни искази,

(в) импликација бити лажна само *ако* је p тачан, а *тада* је q нетачан исказ,

(г) негација „не p“ бити тачна, кад је њена *негација* (тј. p) нетачан исказ.

Из горе наведеног видимо да ни на овај начин, тј. путем таблица, не можемо сасвим избећи интуитивно значење поменутих везника.

Искуство показује да ученици могу да добро савладају ово градиво у овом оквиру и успешно решавају задатке где, примера ради, треба доказати да је нека сложенија исказна формула таутологија, али тешкоће се јављају кад то градиво треба да се успешно примени на остале садржаје. (Према неким истраживањима, проведеним у Француској, ситуација је слична и са децом успореном у развоју.) Разлог што је то тако треба тражити у чињеници да је већина тврђења у математици исказана у виду реченица чији су субјекти реторичке променљиве (а што је тако често у геометрији) или путем предикатских формула са једном или више променљивих. Однос општости је сличан оном који имају изрази састављени од константи, а што одговара исказним формулама, према изразима у којима се јављају променљиве, а што одговара предикатским формулама.

Узмимо један конкретан пример, па, рецимо, погледајмо како ученик треба да решава следећу неједначину

$$\sqrt{x^2-1} > x. \tag{1}$$

Прво се одређује домен дефинисаности датог задатка, а њега одређује услов

$$x^2 - 1 \geqslant 0.$$

Решавајући, добијамо $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. У следећем кораку квадрирамо да бисмо се ослободили корена, али поставља се питање еквивалентности те једначине и оне добијене квадрирањем. Пошто је вредност $a = \sqrt{x^2-1}$ ненегативна, користићемо следећу еквиваленцију

$$(\forall a \geqslant 0)(\forall b)\ a > b \iff a^2 > b^2 \text{ \textit{или} } b < 0.$$

Процедура решавања сад иде тако што за свако $x \in D$ имамо

$$\sqrt{x^2-1} > x \iff x^2 - 1 > x^2 \text{ \textit{или} } x < 0.$$

Скуп решења прве неједначине на десној страни је празан, а друге $(-\infty, -1]$ (гледано у домену D). Дакле, скуп решења дате неједначине је $(-\infty, -1]$.

Питање да ли је неједначина (1) тачна је без икаквог смисла. Узимајући, пак, вредности за променљиву x из домена D, рецимо -3, -2, -1, 1, 2 заменом, добићемо следеће исказе

$$\sqrt{(-3)^2-1} > -3, \quad \sqrt{(-2)^2-1} > -2, \quad \sqrt{(-1)^2-1} > -1,$$
$$\sqrt{1^2-1} > 1, \quad \sqrt{2^2-1} > 2$$

од којих су неки (тј. прва три) тачни а неки (тј. последња два) нетачни.

Користећи општији језик логике можемо рећи да је запис (1) формула са променљивом $x \in \mathbf{R}$ (синтактички појам), и пошто је $D \neq \varnothing$, да та формула задаје исказну (или пропозициону) функцију (семантички појам), чији је домен скуп $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, а кодомен скуп исказа међу којима су пет горе написаних неједнакости али и све друге које се добијају фиксирањем вредности променљиве у скупу D.

За неједначину

$$\log(x-1)+\log(1-x)>1, \tag{2}$$

налазимо да је домен дефинисаности празан скуп, па никада не кажемо да је скуп решења те неједначине празан, већ да је таква неједначина апсурдна.

Дакле, видимо да неке формуле, као она под (1), задају пропозиционе функције, али и да има формула (као она под (2)), које не задају никакве пропозиционе функције.

Ученику коме се логика сведе на садржаје везане за исказе, остаје заиста тежак задатак да, вреднујући тачка по тачка, то стечено знање пренесе и на услове у којима се јављају формуле са променљивом. Наведени пример решавања неједначине (1), то најбоље илуструје.

Проширујући тему требало би, за две формуле $p(x)$ и $q(x)$ (које задају пропозиционе функције са истим доменом D), а које имају истиносне скупове A и B, доказати теореме које одређују истиносне скупове: за $p(x)\vee q(x)$ скуп $A\cup B$, а за $p(x)\wedge q(x)$ скуп $A\cap B$. Исто тако требало би доказати да је универзални исказ

$$(\forall x)\ p(x) \implies q(x)$$

тачан ако и само ако је $A\subset B$.

Али није то оно што бих ја овде препоручивао, јер сматрам да опште појмове и термине које налазимо у логици не треба прерано одвајати од конкретних садржаја у којима се јављају и изражавају на природнији начин. С друге стране не може се логички склоп разних услова са којима се у настави математике оперише, оставити да спонтано стиче смисао. А то што ми мислимо да би требало радити, сад ћемо укратко скицирати.

2.3. Данас се већ у нижим разредима основне школе јављају разни услови у виду једноставних једначина или неједначина. Таквим условима придељујемо скупове које називамо скуповима решења. С друге стране скупове почињемо да задајемо на следећи начин

$$A=\{\,x\mid p(x)\,\},$$

где витичасте заграде играју улогу оператора окупљања, тј. елементи скупа A су сви они објекти x који задовољавају услов $p(x)$. Синтактички гледано, $p(x)$ је реченица са субјектом x, односно формула са променљивом x, а семантички то је пропозициона функција за коју је A истиносни скуп. Многи конкретни садржаји, као што су решавање једначина, неједначина, система итд, нису ништа друго доли одређивање скупа A на основу услова $p(x)$.

Смисао операција са скуповима и релација међу њима, ученици лако усвајају већ и зато што се све то може врло сугестивно интерпретирати сликама.

За два скупа A и B, њихова унија је скуп

$$A\cup B=\{\,x\mid x\in A \textit{ или } x\in B\,\},$$

а пресек скуп

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}.$$

Овде се, у овим дефиницијама, везници „*или*“ и „*и*“ јављају са својим интуитивним значењем. Али кад ученик сасвим усвоји значења ових скуповних операција, онда му се могу одредити значења ових везника у случају два произвољна услова са истом променљивом.

Наиме, ако $p(x)$ одређује скуп A, а $q(x)$ скуп B, тада

(а) услов „$p(x)$ *или* $q(x)$“ одређује скуп $A \cup B$,

(б) а услов „$p(x)$ *и* $q(x)$“ одређује скуп $A \cap B$.

На пример,

(а') $x < 1$ *или* $x > 3$, одређује скуп $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$,

(б') $x > 1$ *и* $x < 3$, одређује скуп $(1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (1, 3)$.

Наставимо ову паралелу посматрајући и релацијске везе. Инклузију $A \subset B$ дефинишемо тако што тада мора бити испуњен услов: за сваки објекат x, *ако* је $x \in A$ *тада* је $x \in B$. И овде везник „*ако ... тада*“ има интуитивно значење, а скуп A „*видимо као део*“ скупа B.

Схватајући импликацију „$p(x) \implies q(x)$“ као операцију, онда је дефинишемо са „$\neg p(x) \vee q(x)$“ и ретко је третирамо као отворени услов, тј. ретко решавамо задатке који би одређивали њен истиносни скуп. А оно што често радимо је утврђивање тачности универзалног изказа

$$(\forall x)\, p(x) \implies q(x). \tag{3}$$

Посматрајући и даље паралелно, узимамо да је услов (3) тачан кад год је истиносни скуп A од $p(x)$, садржан у истиносном скупу B од $q(x)$.

На пример, тачност исказа: за свако $x \in \mathbf{R}$,

$$|x| < 3 \implies x^2 - 2x - 15 < 0$$

доказујемо тако што поредимо скупове решења:

$$(-3, 3) \subset (-3, 5).$$

Слично, тачност исказа

$$(\forall x)\, p(x) \iff q(x) \tag{4}$$

можемо везати за једнакост одговарајућих истиносних скупова.

Видимо да се на овај начин везници „*ако ... тада*“ и „*ако и само ако*“ сагледавају не као операције, већ као релацијски односи у класи пропозиционих функција. Ограничимо ли се на питања тачности исказа под (3) и (4), та разлика нестаје, тј. једно комплетније излагање садржаја из логике које би почињало операцијама са пропозицијама, морало би садржавати теореме које кажу да кад су A и B истиносни скупвои за $p(x)$ и $q(x)$, (3) је тачно кад је $A \subset B$, а (4) кад је $A = B$.

Постоје подесни примери који се јављају у конкретним садржајима и потребе да се ти садржаји учине још јаснијим, већ у програмима старијих разреда основне школе, тако што би се логичка функција поменутих везника ту прецизирала, на горе изложени начин. Значење речи „услов“ јасно је ученицима тог узраста, а честа употреба то би значење даље учвршћивала. Ниједан општи логички термин не би био коришћен, а језички сложени склопови били би јасно разбијани или слагани од оних који су једноставнији.

Врло је битно да се искључиво формирају сложене реченице са истим субјектом, осносно сложени услови, од оних са истом променљивом. Уствари, само са таквим реченицама, односно условима искључиво оперишемо, иако често кажемо да је, на пример, сваки квадрат правоугаоник, чиме скраћујемо реченицу: за сваки четвороугао X, ако је X квадрат тада је X правоугаоник. Али и претеривање у доследној употреби речи које квантификују или једнообразних реченица којим бисмо, мотивисани жељом за крајњом прецизношћу, исказивали садржаје математике, не би била одлика добре наставе.

Дакле, сигурно је да у одговарајућем облику, са излагањем логике треба почети раније него што је то сад случај, а у елегантном облику са исказима и таблицама касније него што је то сад случај. А кад? То не бих могао да сугеришем са једнаком сигурношћу.