НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2000, XLV, 1–2, стр. 9–16

др Светлана В. Јанковић

ДА ЛИ СЕ МОЖЕ ОДРЕДИТИ ВЕРОВАТНОЋА СЛУЧАЈНОГ ИЗБОРА ПАРНОГ БРОЈА ИЗ СКУПА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА?

Подстицај за писање овог рада аутор је добио од својих студената и ученика специјалног математичког одељења, којима је при увођењу појма пребројивог простора вероватноћа редовно постављао питање: колика је вероватноћа случајног избора парног броја из скупа природних бројева? Добијао је три врсте одговора. Математичари по опредељењу одговарали су да је вероватноћа $1/2$, док је код опрезнијих одговор било ћутање, уз понеки коментар да питање не би ни било постављено да је одговор тако једноставан. Математичари по рођењу, редовно у малом броју, одговарали су да се ова вероватноћа не може одредити, односно да нема довољно података да се она одреди, продирући тако у саму суштину проблема, у аксиоматику теорије вероватноћа.

Теорија вероватноћа као математичка дисциплина почиње да се развија тридесетих година овог века. Руски математичар А. Н. Колмогоров (1903–1987) дефинисао је аксиоме теорије вероватноћа 1933. године у својој монографији „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung“ (Основни појмови рачуна вероватноће). Неки проблеми, за које се до појаве ове аксиоматике сматрало да су коректно постављени и решени, постали су несагласни са аксиоматиком (видети, на пример, [4], [6], [7], [10]). Такав је случај и са проблемима које ћемо овде разматрати, а који се у различитим видовима могу јавити у настави математике у оквиру методских јединица из вероватноће. Да би се схватила суштина проблема, изложићемо претходно основне елементе аксиоматике Колмогорова за највише пребројив скуп елементарних догађаја, која се, без посебног наглашавања да се ради о аксиоматици, наводи у уџбеницима као дефиниција вероватноће.

1. Аксиоматика теорије вероватноћа

Нека је Ω највише пребројив скуп елементарних догађаја неког случајног експеримента — резултати експеримента су случајни елементарни догађаји. Случајни догађаји су подскупови од Ω (придев *случајан* надаље се изоставља). По аксиоматици теорије вероватноћа, *вероватноћа P је функција подскупова од Ω, са особинама*:

Аксиома 1: $P(\Omega) = 1$ *(нормираност);*

Аксиома 2: $P(A) \geqslant 0$ *за свако* $A \subset \Omega$ *(ненегативност);*

Аксиома 3: $P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ *за произвољне догађаје* $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$, *у паровима искључиве* ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) *(пребројива адитивност).*

У најједноставнијем случају, када је скуп елементарних догађаја коначан, тј. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, скуп свих подскупова од Ω је партитивни скуп од Ω који има 2^n елемената. Због коначног броја подскупова од Ω, Аксиома 3 се своди на коначну адитивност, тј. на једнакост $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$. За одређивање вероватноће било ког догађаја довољно је задати вероватноће свих елементарних догађаја,

$$P(\omega_i) = p_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

при чему по Аксиоми 1 и из коначне адитивности следи $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Вероватноћа догађаја A је

$$P(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i. \tag{1}$$

Специјално, ако је $p_i = 1/n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ради се о скупу једнаковероватних елементарних догађаја, односно о класичној или Лапласовој дефиницији вероватноће. Вероватноћа догађаја A једнака је односу броја елементарних догађаја садржаних у A (повољних за A) и броја свих могућих елементарних догађаја. Тако, ако је A унија k елементарних догађаја, тада је

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

У сложенијем случају, ако је Ω пребројив скуп, тј. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, задају се вероватноће елементарних догађаја,

$$P(\omega_i) = p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

при чему по Аксиоми 1 и Аксиоми 3 мора бити $p_1 + p_2 + \cdots = 1$. Произвољан догађај $A \subset \Omega$ има вероватноћу описану са (1), с тим да ова сума може имати коначно много сабирака или бесконачно много сабирака према томе да ли је догађај A коначна или пребројива унија елементарних догађаја.

За разлику од коначног скупа Ω, основна претпоставка за пребројив скуп Ω је да *сви елементарни догађаји не могу бити једнаковероватни*, јер бисмо у том случају имали

$$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots = \infty,$$

што противуречи Аксиоми 1. Према томе, *за пребројив скуп* Ω *не може се претпоставити униформна расподела вероватноћа елементарних догађаја.*

Напомена 1. Иако се по програму четвртог разреда гимназије и других средњих школа посебно не изучава пребројив простор вероватноћа, он се посредно јавља при разматрању случајне променљиве дискретног типа са пребројивим скупом вредности. Класичан пример пребројивог скупа Ω је експеримент бацања хомогеног новчића све док се не појави писмо. Ако писмо означимо са П, а грб са Г, тада је $\Omega = \{\text{П,ГП,ГГП,ГГГП}, \ldots\} \cup \{\text{ГГГ}\ldots\}$, где се елементаран догађај $\omega_0 = \{\Gamma\Gamma\Gamma\ldots\}$ јавља као логична могућност да се експеримент никада не заврши. Како се бацања изводе независно једно од другог, то је $p_i = P(\omega_i) = P(\underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ \ldots\ \Gamma}_{i-1}\Pi) = \dfrac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, \ldots$. Због тога је $1 = P(\Omega) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i + P(\omega_0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i} + P(\omega_0) = 1 + P(\omega_0)$. Како је $P(\omega_0) = 0$, догађај ω_0 је *скоро немогућ* — реално је могуће да се он догоди, али је вероватноћа његове реализације једнака нули, за разлику од немогућег догађаја који се никада не догађа.

Пошто су познате вероватноће свих елементарних догађаја из Ω, сада се могу одређивати вероватноће произвољних догађаја, подскупова од Ω. На пример, вероватноћа да се експеримент заврши пре петог бацања је $P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 15/16$, а да се заврши у парном броју бацања је $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 + \cdots = 1/2^2 + 1/2^4 + 1/2^6 + \cdots = 1/3$. Овом експерименту се придружује случајна променљива дискретног типа чија је нумеричка карактеристика број бацања новчића док се експеримент не заврши,

$$X: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2^2} & \dfrac{1}{2^3} & \ldots \end{pmatrix},$$

дакле, случајна променљива са геометријском расподелом („Математика за IV разред средње школе“, М. Обрадовић, Д. Георгијевић, стр. 228, 233).

2. Историјат проблема

У периоду пре аксиоматике Колмогорова, прецизније, пре увођења појма пребројиве адитивности из које следи да пребројив простор вероватноћа не може имати униформну расподелу вероватноћа елементарних догађаја, постављани су и решавани проблеми у вези скупа целих или природних бројева, за које се управо претпостављала униформна расподела вероватноћа по елементима ових скупова. Такав је случај са наредним проблемом који је поставио руски математичар П. Л. Чебишов (1821–1894) осамдесетих година прошлог века (видети коментар уз [10]).

Проблем Чебишова. *Одредити вероватноћу да се случајно изабран разломак не може скратити.*

Проблем Чебишова се у литератури јавља и у еквивалентном облику: одредити вероватноћу да два случајно изабрана броја из скупа целих бројева буду узајамно проста.

Решење проблема Чебишова заснива се на следећој идеји: да би неки цео број био дељив бројем m, остатак при дељењу мора бити 0. Како су могући остаци 0, 1, 2, ..., $m-1$, вероватноћа да је број дељив са m је по класичној дефиницији вероватноће једнака $1/m$. Из овог закључка и става да су два броја узајамно проста ако и само ако нису оба дељива произвољним простим бројем, користећи супротне догађаје, Чебишов закључује да је тражена вероватноћа

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{m^2}\right),$$

где је $2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ \ldots$ растући низ простих бројева. Одавде долази до вероватноће $6/\pi^2$ догађаја да се случајно изабран разломак не може скратити.

Очигледно, грешка у резоновању (видети, на пример, [4]) је да се à priori претпоставља да су исходи $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ једнаковероватни. Ово се може закључити само из претпоставке о униформној расподели вероватноћа на скупу целих бројева, што нас поново незаобилазно доводи до аксиоматике Колмогорова. Поред тога, у претходном изразу за вероватноћу p број m је фактички највећи прост број којим су дељиви случајно изабрани бројеви X и Y из разломка X/Y. Отуда је $m \leqslant \min\{X, Y\}$, дакле, случајна променљива, па се помоћу ње на описани начин не може добити неслучајна вредност p.

У даљем историјском развоју теорије вероватноћа, у покушају да се одреде вероватноће догађаја који су пребројиве уније елементарних догађаја, а да притом нису познате вероватноће самих елементарних догађаја, прибегавало се примени класичне дефиниције вероватноће. Тако се појавила следећа дефиниција вероватноће, суштински несагласна са аксиоматиком Колмогорова, која се, штавише, дуги низ година после аксиоматике заснивања теорије вероватноћа, примењивала у „решавању“ проблема Чебишова и других сличних проблема ([5], [8], [9]).

($*$) Нека је догађај A да случајно изабран број из бесконачног низа бројева $a_1,\ a_2,\ \ldots$ има особину α. Ако међу првих N бројева $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$ овог низа има k_N бројева који имају особину α, и ако количник k_N/N тежи одређеној граници кад $N \to \infty$, тада је вероватноћа догађаја A

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{k_N}{N}.$$

Ако се дефиниција ($*$) примени у одређивању вероватноће да случајно изабран број из скупа природних бројева буде дељив бројем m, лако се закључује ([5], [9]) да је

$$p_N = \frac{[N/m]}{N}, \tag{2}$$

где је са $[N/m]$ означен цео део броја N/m. Како је

$$\frac{[N/m]}{N} = \frac{k}{km+r} = \frac{1}{m} - \frac{r/m}{N}, \quad r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \tag{3}$$

то је, по дефиницији ($*$), $P(A) = \lim\limits_{N\to\infty} p_N = \dfrac{1}{m}$.

Ако се истим поступком одреди вероватноћа случајног избора било ког фиксираног броја из скупа природних бројева, добија се

$$p_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Према томе, сви елементи скупа елементарних догађаја су вероватноће нула, што је *парадокс*, јер је скуп елементарних догађаја сигуран догађај.

У [7, стр. 177–178] је наведено више илустративних примера о несагласности ове дефиниције вероватноће са аксиоматиком Колмогорова, између осталог и следећи пример француског математичара П. Левија (P. Lévy) из 1935. године: нека су X и Y случајно изабрани бројеви из скупа природних бројева. За произвољне фиксиране природне бројева m и n вероватноће догађаја $X \leqslant m$ и $Y \leqslant n$ су по дефиницији $(*)$ једнаке нули. Притом је $P\{X \leqslant Y\} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{X \leqslant n\} = 0$, и слично $p\{Y \leqslant X\} = 0$, што је немогуће јер се ради о супротним догађајима.

До парадокса у претходним примерима долази јер дефиниција $(*)$ *не узима у обзир пребројиву адитивност када је Ω пребројив скуп.* Штавише, може се доказати да функција P из ове дефиницје нема ни елементарно својство вероватноће да се може применити у одређивању вероватноће коначне уније догађаја. Другим речима, ако у смислу дефиниције $(*)$ постоје вероватноће догађаја A и B, не значи да постоји вероватноћа догађаја $A \cup B$.

3. Коректно постављени проблеми

Пошто смо већ закључили да су проблеми случајног избора неког броја из скупа природних (или целих) бројева, који имају неко дато својство, некоректно постављени у односу на аксиоматику Колмогорова, а имајући притом у виду нашу интуитивну представу о самим проблемима, основно је питање да ли се ове тешкоће могу превазићи погодном преформулацијом разматрних проблема (на пример, релативне учестаности случајног избора парног броја из велике серије коначних низова природних бројева, на основу статистичке хомогености морале би бити око $1/2$). То се може постићи поступком који у неку руку „помирује" дефиницију $(*)$ са аксиоматиком Колмогорова. Дакле, треба одредити вероватноћу q_N да случајно изабран број међу првих N природних бројева има дато својство, па потом одредити $\lim\limits_{N\to\infty} q_N$, наравно, ако постоји. Због коначног $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, у одређивању вероватноће q_N логично је применити класичну дефиницију вероватноће, док $\lim\limits_{N\to\infty} q_N$ више није ни у каквој вези са простором вероватноћа, већ је обична гранична вредност низа ненегативних бројева, која указује на асимптотско понашање вероватноће када се N неограниено повећава.

Многи проблеми у теорији вероватноћа у вези скупа природних бројева, постављени су и решавани у бројној литератури управо претходно описаним поступком (видети, на пример, [1], [2], [3]). Наводимо неке од таквих проблема, између осталог и коректно преформулисан проблем Чебишова.

1. Одредити вероватноћу q_N да случајно изабран број из скупа првих N природних бројева буде тачан квадрат. Чему тежи q_N кад $N \to \infty$?

Решење. Очигледно, $q_N = \dfrac{[\sqrt{N}]}{N}$. Како $0 \leqslant \dfrac{[\sqrt{N}]}{N} \leqslant \dfrac{\sqrt{N}}{N} \to 0$ кад $N \to \infty$, то је $\lim\limits_{N\to\infty} q_N = 0$. $\triangle$

2. Из скупа $\{1, 2, \ldots, N\}$ случајно се са враћањем бира k бројева. Одредити вероватноћу q_N и $\lim\limits_{N\to\infty} q_N$ следећих догађаја:

а) сваки од изабраних бројева је дељив бројем m;

б) сваки од изабраних бројева је дељив бројем m_1 или бројем m_2;

в) међу изабраним бројевима бар један је дељив бројем m.

Решење. а) Вероватноћа да случајно изабран број из скупа $\{1, 2, \ldots, N\}$ буде дељив бројем m је, према (2), једнака $p_N = \dfrac{[N/m]}{N}$, при чему је $\lim\limits_{N\to\infty} p_N = \dfrac{1}{m}$. Како се бројеви бирају независно један од другог, то је

$$q_N = \left(\frac{[N/m]}{N}\right)^k, \qquad \lim_{N\to\infty} q_N = \frac{1}{m^k}.$$

б) Нека су A_1 и A_2 догађаји да је случајно изабран број из скупа $\{1, 2, \ldots, N\}$ дељив редом бројевима m_1 и m_2. Тада је вероватноћа p_N да је овај број дељив бројем m_1 или бројем m_2 једнака

$$p_N = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{[N/m_1]}{N} + \frac{[N/m_2]}{N} + \frac{[N/m_1 m_2]}{N},$$

тако да је

$$q_N = (p_N)^k, \qquad \lim_{N\to\infty} q_N = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1 m_2}\right)^k.$$

в) Вероватноћу догађаја да је међу изабраним бројевима бар један дељив бројем m одредићемо помоћу супротног догађаја да свих k бројева није дељиво бројем m. Отуда је

$$q_N = 1 - \left(1 - \frac{[N/m]}{N}\right)^k, \qquad \lim_{N\to\infty} q_N = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k. \quad \triangle$$

3. Одредити вероватноћу q_N да се количник два случајно изабрана броја из скупа првих N природних бројева не може скратити. Чему тежи q_N кад $N \to \infty$?

Решење. Решаваћемо еквивалентан проблем одређивања вероватноће q_N да два случајно изабрана броја из скупа првих N природних бројева буду узајамно проста. Вероватноћу q_N ћемо одредити користећи тврђење које је и Чебишов користио, да су два броја узајамно проста ако и само ако нису оба дељиви ниједним простим бројем.

Нека је m_N највећи прост број у скупу $\{1, 2, \ldots, N\}$ и нека су A_2, A_3, A_5, $\ldots$, A_{m_N} догађаји да су два случајно изабрана броја из овог скупа дељиви редом са 2, 3, 5, $\ldots$, m_N. Тада је

$$\begin{aligned} q_N &= P(\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \cdots \cap \overline{A}_{m_N}) = P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) \cdots P(\overline{A}_{m_N}) \\ &= [1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] \cdots [1 - P(A_{m_N})]. \end{aligned}$$

Како се бројеви бирају независно један од другог, то је $P(A_2) = \dfrac{[N/2]}{N} \cdot \dfrac{[N/2]}{N}$, $P(A_3) = \dfrac{[N/3]}{N} \cdot \dfrac{[N/3]}{N}, \ldots$, тако да је тражена вероватноћа

$$q_N = \left[1 - \left(\frac{[N/2]}{N}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{[N/3]}{N}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{[N/m_N]}{N}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Низ (q_N) је конвергентан јер је монотоно нерастући и ограничен одоздо нулом, а одозго јединицом. Да бисмо одредили $\lim\limits_{N\to\infty} q_N$, приметимо да се са повећањем броја N повећава и број чинилаца у производу (4), што отежава налажење граничне вредности. За произвољно m из (3) следи

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{N} < \frac{[N/m]}{N} \leqslant \frac{1}{m}. \tag{5}$$

Ако означимо

$$p_N = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m_N^2}\right),$$

из (4) и (5) имамо

$$p_N \leqslant q_N < \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{1}{m_N} - \frac{1}{N}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Како $p_N \to \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \left(1 - \dfrac{1}{5^2}\right) \cdots$ кад $N \to \infty$, и како је

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} \cdots \\ &\quad = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \cdots \\ &\qquad = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

то је $\lim\limits_{N\to\infty} p_N = \dfrac{6}{\pi^2}$.

За произвољно $N_0 < N$ нека је m_{N_0} највећи прост број из скупа $\{1, 2, \ldots, N_0\}$. Тада се низ на десној страни неједнакости (6) може мајорирати са

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{1}{m_{N_0}} - \frac{1}{N}\right)^2\right],$$

тако да за свако N_0 важи

$$\begin{aligned} \frac{6}{\pi^2} = \lim_{N\to\infty} p_N \leqslant \lim_{N\to\infty} q_N &\leqslant \lim_{N\to\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{1}{m_{N_0}} - \frac{1}{N}\right)^2\right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m_{N_0}^2}\right). \end{aligned}$$

Преласком на граничну вредност у последњој неједнакости када $N_0 \to \infty$, следи да је $\lim q_N = \dfrac{6}{\pi^2}$. $\triangle$

На крају сумирајмо претходна разматрања кроз одговор на питање из наслова овог рада: не може се, у складу са аксиоматиком теорије вероватноћа, одредити вероватноћа случајног избора парног броја из скупа природних бројева ако нису познате вероватноће случајног избора сваког појединог броја из овог скупа, при чему се не може претпоставити униформна расподела ових вероватноћа. Вероватноћа случајног избора парног броја из скупа $\{1, 2, \ldots, N\}$ је

$$q_N = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & N \text{ парно}, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2N}, & N \text{ непарно}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lim_{N\to\infty} q_N = \frac{1}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. М. Андрухаев, *Сборник задач по теории вероятностей*, Просвещение, Москва, 1985.

[2] А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко, *Теория вероятностей – Сборник задач*, Вища школа, Киев, 1980.

[3] З. Глишић, П. Перуничић, *Збирка решених задатака из вероватноће и математичке статистике*, Научна књига, Београд, 1982.

[4] С. Д. Јанковић, *О проблему Чебишева*, Зборник радова Филозофског факултета у Нишу **IX**, 191–192, 1985.

[5] В. Милошевић, *Примена класичне дефиниције вероватноће код експеримената са пребројиво много исхода*, Настава математике **XLIII**, 1–2, 40–43, Београд, 1998.

[6] J. Stoyanov, *Counterexamples in Probability*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[7] G. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[8] П. М. Васић, *Задаци и проблеми из теорије вероватноће*, Грађевинска књига, Београд, 1974.

[9] А. М. Яглом, И. М. Яглом, *Неэлементарные задачи в элементарном изложении*, Гос. изд. технико-теоретической лит, Москва, 1954.

[10] П. Л. Чебышев, *Теория вероятностей*, АН СССР, Москва, 1936. [Ова књига настала је из бележака А. М. Љапунова које је као студент записивао на предавањима Чебишова 1879/1880 године у Петерсбургу, а које је Чебишов ауторизовао 1882. године. Рукопис Љапунова је архивиран у АН СССР, а објављен је као уџбеник тек 1936. године.]