Славица Бранковић

О КВАДРАТИМА

Предмет нашег излагања неће бити квадрат као једна савршена геометријска фигура са његовим многим лепим геометријским особинама. Уместо тога посматраћемо ове правилности са нумеричке стране, не повезујући их са геометријом.

Квадрати бројева и њихове особине стална су инспирација математичара да покушавају да нађу међу њима интересантне односе, релације и законитости.

Квадратни број је један од природних бројева 1, 4, 9, 16, 25, ... Није тешко уочити релацију између узастопних чланова овога низа. Види се да ако квадрату неког броја x додамо двоструки x увећан за јединицу, добија се квадрат следећег, тј. $x^2 + (2x+1) = (x+1)^2$. На пример, $5^2 + 2\cdot 5 + 1 = 6^2$. Значи, ако знамо квадрат неког броја, лако се добије квадрат њему следећег броја.

Према једном другом правилу, квадрат броја који се завршава са 5 може се одмах написати: помножи се број који чине цифре испред цифре јединица са њему следећим целим бројем и том производу припише 25. На пример, $3\cdot 4 = 12$, па је $35^2 = 1225$; $11\cdot 12 = 132$, па је $115^2 = 13225$.

Из познате алгебарске релације за квадрат збира и разлике

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

имамо посебан случај

$$(a\pm 1)^2 = a^2 \pm 2a + 1,$$

што се може искористити да се нађе квадрат броја $a\pm 1$ ако се зна квадрат броја a. На пример, $60^2 = 3600$ па лако добијемо $61^2 = 60^2 + 2\cdot 60 + 1 = 3721$ или $59^2 = 60^2 - 2\cdot 60 + 1 = 3481$.

Мало је теже за $(a\pm 2)^2 = a^2 \pm 4a + 4$. На пример, $62^2 = 60^2 + 4\cdot 60 + 4 = 3844$ или $58^2 = 60^2 - 4\cdot 60 + 4 = 3364$.

Квадрати бројева који се завршавају нулом лако се памте, а показали смо како се на лак начин налазе квадрати бројева који се завршавају са 5 па се на овај нашин са мало рачунања могу добити и квадрати бројева који су од ових мањи или већи за 1 или 2. На пример, $77^2 = (75+2)^2 = 75^2 + 4\cdot 75 + 4 = 5625 + 300 + 4 = 5929$.

Следећи метод заснива се на познатој алгебарској релацији (разлика квадрата) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ из које се добија

$$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2.$$

Значи, ако је потребно наћи a^2, треба узети b тако да или $a+b$ или $a-b$ буде згодан број (на пример, да се завршава нулом). На пример, $47^2 = (47+3)(47-3)+3^2 = 50 \cdot 44 + 9 = 2209$, $113^2 = (113+13)(113-13)+13^2 = 126 \cdot 100 + 169 = 12769$.

За бројеве у одређеним границама могу бити коришћене врло једноставне методе за налажење њихових квадрата. На пример, за бројеве између 40 и 60: треба их упоредити са бројем 50, па вишак (за веће од 50), односно мањак (за мање од 50) додати, односно одузети од броја 25 и томе дописати квадрат ове разлике. На пример, за 54^2: вишак је 4, са 25 даје 29, квадрат вишка је 16, па је $54^2 = 2916$. Ако је квадрат разлике једноцифрен број треба га писати као двоцифрен са префиксом нула. На пример, 48^2: разлика до 50 је -2, $25-2=23$, приписати му квадрат од 2 као двоцифрен, тј. 04 па је $48^2 = 2304$.

Ово правило произлази из једнакости

$$(50 \pm x)^2 = 2500 \pm 100x + x^2 = (25 \pm x) \cdot 100 + x^2.$$

Множење $25 \pm x$ са 100 оставља места јединица и десетица празна која се попуњавају квадратом разлике до 50 писаним као двоцифрен број.

Формула се може применити и за x веће од 10, тада x^2 има више од две цифре и правило није тако једноставно. На пример, 63^2: вишак изнад 50 је 13, $25+13=38$, $13^2 = 169$ па је $63^2 = 3800 + 169 = 3969$.

За бројеве између 20 и 29 може се применити ово правило знајући да је квадрат броја четвртина квадрата двоструког тог броја. На пример, за 28^2 нађе се 56^2 и подели са 4. Слично за бројеве од 82 до 98: деле се са 2 и квадрат тако добијеног броја применом правила множи се са 4. На пример, за 82^2: имамо $41^2 = 1681$, множено са 4 даје 6724.

Слично је и следеће правило које се може применити за све бројеве, али је најпогодније за бројеве између 90 и 110.

$$(100 \pm x)^2 = 10000 \pm 200x + x^2 = (100 \pm 2x) \cdot 100 + x^2 = (100 \pm x \pm x) \cdot 100 + x^2.$$

На пример, за 104^2 имамо $100+4+4$ и 4^2, што даје 10816; за 97^2 имамо $100-3-3$ и $3^2 = 94$ и 9 даје 9409. Има много других правила ове врсте која се, пошто се науче, брзо и забораве ако се често не користе.

Квадрати целих бројева увек се завршавају једном од цифара 0, 1, 4, 5, 6, и 9, а никада са 2, 3, 7 или 8. То је потребан, али не и довољан услов да би неки број био квадратни, јер се број може завршавати неком од цифара првог низа а да није квадратни, док цео број не може бити квадратни ако се не завршава једном од тих цифара.

Интересантно је посматрати могуће двоцифрене завршетке квадратног броја. Таквих има 22 и квадрат већи од 9 може се завршавати једним од двоцифрених бројева из табеле:

00	21	41	64	89
01	24	44	69	96
04	25	49	76	
09	29	56	81	
16	36	61	84	

Ово сазнање је врло корисно у истраживању извесних односа бројева. Ако желимо да видимо да ли квадрат додат или одузет од неког броја даје квадрат, двоцифрени завршеци помажу да се искључе немогући случајеви. На пример, ако желимо наћи x^2 такав да је $5581 - x^2$ такође квадрат, из табеле видимо да се x^2 може завршавати само на 00, 25, 56 или 81 ($x^2 = 4356 = 66^2$ и $5581 - 4356 = 1225 = 35^2$).

Квадрати се, наравно, могу завршавати са било којим парним бројем нула. Међутим, ниједан квадрат се не може завршавати са више него три четворке и $38^2 = 1444$ је најмањи квадрат са таквим завршетком. Приличан је интервал до следећег таквог броја: $462^2 = 213444$, после овога су $538^2 = 289444$ и $962^2 = 925444$, Уопште, $500x \pm 38$ је број чији се квадрат завршава са три четворке, где је x било који цео број укључујући нулу.

Постоји класа целих бројева позната као *аутоморфни бројеви* код чијих квадрата су последњих n цифара исте као код самог броја. На пример, за $n = 1$, сваки број који се завршава са 5 или 6 има квадрат који се такође завршава тим цифрама; за $n = 2$, ако се бројеви завршавају са 25 или 76, квадрати им се завршавају истим цифрама; за $n = 3$, сваки број са завршетком 376, 625 има и квадрат који се завршава са исте три цифре. Постоје такође два прилично тривијална скупа бројева који се завршавају нулама или нулама иза којих следи завршна јединица, као што су 000 или 0001, чије се квадрати завршавају истим цифрама.

Има много релација које садрже квадрате и њихове цифре. Четвороцифрени број 2025 је квадрат, а остаје квадрат када се свака његова цифра повећа за јединицу, 3136. Такође и двоцифрени број 25 има исту особину (36).

Премештајући цифре броја 65 добије се 56 и $65^2 - 56^2 = 33^2$ је једина двоцифрена релација овог типа.

Постоје 83 броја чији квадрати садрже свих девет цифара (сем нуле) без понављања (на пример, $11826^2 = 139854276$), а 87 оних чији квадрати садрже свих десет цифара без понављања (на пример, $32043^2 = 1026753849$).

Постоји неколико релација које показују да разлика два квадрата може бити једнака броју који садржи свих девет цифара узетих само једном. На пример, $11113^2 - 200^2 = 123458769$. У ствари, сваки непаран број изнад јединице, и сви парни бројеви који су умношци четворке, осим саме четворке, могу се изразити као разлика два квадрата. Бројеви који садрже свих девет цифара у растућем или опадајућем низу могу се изразити као разлика два квадрата. На пример, $123456789 = 18133^2 - 14330^2 - 11115^2 - 294^2$ (постоји 6 могућности); $987654321 = 570015^2 - 569148^2 = 191161^2 - 188560^2$ (има 9 могућности). Интересантно је приметити да пошто се девет цифара може пермутовати на 362880 начина, четвртина добијених бројева, 90720, облика је $4x+2$, тј. то су бројеви који се завршавају са 02, 06, 10, 14, … , 98 и није их могуће изразити као разлику два квадрата. Са бројевима 1 и 4 има укупно 90722 броја који се не могу овако изразити. Преостаје 272158 бројева који садрже свих девет цифара узетих само једном који се могу изразити као разлика двају квадрата.

Једна значајна релација произлази из чињенице да је производ суме два квадрата са другом сумом два квадрата увек једнак суми два квадрата,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

Значи, ако се два броја могу изразити као суме два квадрата, тада је и њихов производ сума два квадрата. На пример, $5 = 2^2+1^2$ и $13^2 = 3^2+2^2$, $5\cdot 13 = 65 = 8^2+1^2 = 7^2+4^2$.

Једна изванредна чињеница о квадратима је да се сваки природан број може изразити као збир не више од четири квадрата. Доказ ове теореме није једноставан. Дао га је француски математичар Лагранж по коме је теорема добила име.

Могуће је имати три целобројна квадрата тако да су њихове суме по паровима такође квадрати: $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $y^2+z^2=c^2$. На пример, $44^2+240^2=244^2$, $44^2+117^2=125^2$ и $240^2+117^2=267^2$. Тако кутија са димензијама $44\times 117\times 240$ има стране са целобројним дијагоналама. Помоћу рачунара у скорије време нађено је 130 оваквих тројки!

Да би збир два целобројна квадрата био такође квадрат целог броја, $x^2+y^2=z^2$, морају x, y, z бити облика

$$x = k(m^2-n^2), \quad y = k(2mn), \quad z = k(m^2+n^2),$$

тј. Питагорине тројке бројева, где су m, n и k произвољно одабрани природни бројеви, с тим да су x и y узајамно прости бројеви различите парности.

Постоје такође формуле за добијање низова три или више целих бројева $(x,y,\dots)$ за које је збир квадрата такође цео квадрат. На пример, једна од формула која даје тројке (x,y,z) које задовољавају релацију $x^2+y^2+z^2=w^2$ је

$$x = p^2+q^2-r^2, \quad y = 2pr, \quad z = 2qr, \quad w = p^2+q^2+r^2,$$

где p, q и r не морају бити рационални бројеви. На пример, за p, q и r једнаке 2, 3, 4 (односно $\sqrt{2}/2$, $3\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}$) за x,y,z и w добију се -3, 16, 24, 29 (односно 3, 2, 6, 7) што задовољава дату релацију.

Истакнимо једну занимљивост. Збир од $n+1$ квадрата узастопних природних бројева почев од $n(2n+1)$ једнак је збиру од n квадрата узастопних бројева који за њима непосредно следе. На пример, за $n=1$: $3^2+4^2=5^2$; $n=2$: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$, итд.

Постоје и они случајеви кад је збир квадрата узастопних бројева опет квадрат неког броја. Ево пар примера:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+24^2 = 4900 = 70^2,$$

$$18^2+19^2+20^2+\cdots+28^2 = 5929 = 77^2.$$

Наведимо и овај куриозитет: $12345678987654321 = (111111111)^2$.